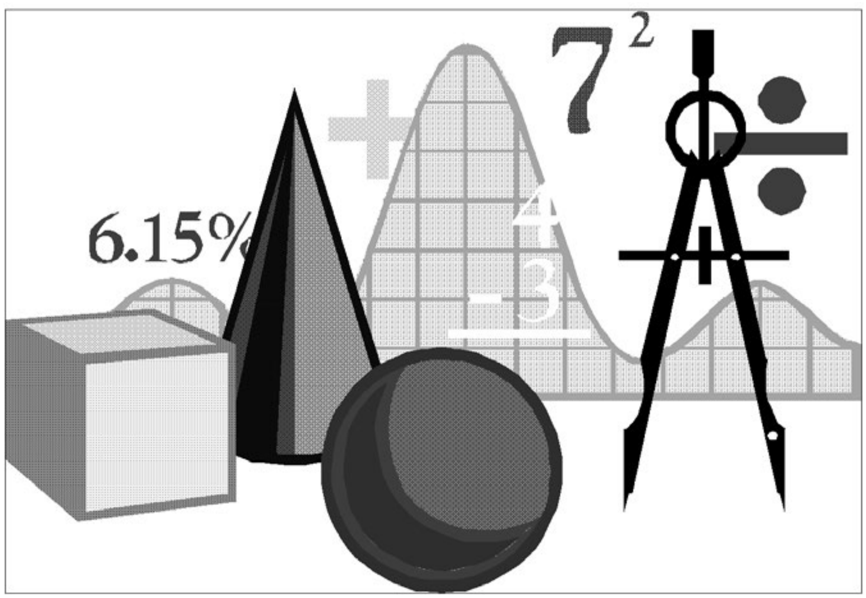
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO

“LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN”

MATEMÁTICA

2° Año



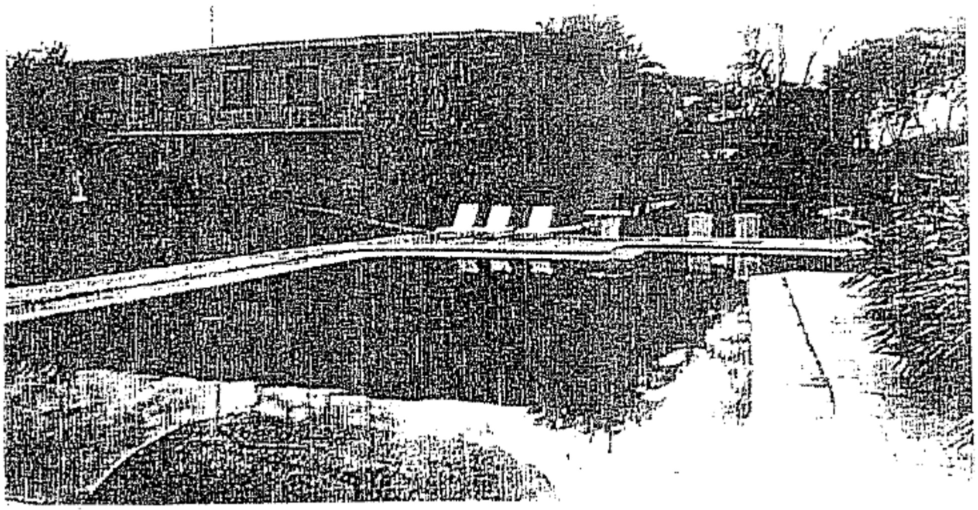
EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

2014

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Fracciones que se forman con polinomios

Una bomba tarda una cierta cantidad de horas en llenar una pileta, mientras que una boca tarda 10 horas más en desagotarla. ¿Qué fracción de la pileta se llena dejando abiertas, simultáneamente, la bomba y la boca durante 1 hora?



Llamamos: $t \longrightarrow$ número de horas que tarda la bomba en llenar la pileta;
entonces, $t + 10 \longrightarrow$ número de horas que tarda la boca en desagotar la pileta.
$\frac{1}{t} \longrightarrow$ fracción de la pileta que llena la bomba en 1 hora.
$\frac{1}{t+10} \longrightarrow$ fracción de la pileta que desagota la boca en 1 hora.

La diferencia entre estas dos fracciones es la parte de la pileta que se llena:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+10} = \frac{(t+10)-t}{t\,(t+10)} = \frac{10}{t\,(t+10)}$$

Al resolver este problema han aparecido tres fracciones: $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t+10}$ y la diferencia entre ellas $\frac{10}{t\,(t+10)}$ que es su solución.

Como los términos de estas fracciones son polinomios, las llamamos fracciones algebraicas.
Si la bomba tarda 2 horas en llenar la pileta, ¿cuál es la solución del problema anterior?
¿Pueden enunciar un problema que se resuelva con fracciones algebraicas?

1/4

Fracciones algebraicas

Dada dos expresiones algebraicas enteras, es decir, dos polinomios P (x) y Q (x), siendo el segundo distinto del nulo, se llamafracción algebraica a la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$

$\frac{3x-2}{x^2-4}$; $\frac{5}{2x+6}$; $\frac{3x^4+x^3-7}{4x+3}$ son fracciones algebraicas

Simplificación de fracciones algebraicas

La simplificación de fracciones algebraicas es similar a la simplificación de números racionales.

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \boxed{\frac{x-2}{x+2}} \longrightarrow \text{fracción irreducible}$$

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes si y sólo si;

$$P(x) \, . \, S(x) = R(x) \, . \, Q(x)$$

Cada conjunto de fracciones algebraicas equivalentes es una expresión algebraica racional. Sin embargo, entre la simplificación en Q y la de fracciones algebraicas existe una diferencia muy importante: en el primer caso, obtenemos números iguales; en el segundo caso, obtenemos fracciones algebraicas equivalentes que pueden ser iguales o no. Vamos a calcular el dominio de la fracción dada en el ejemplo y el de la fracción que obtuvimos:

$$\text{Dom } \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = R - (2, -2) \qquad \text{Dom } \frac{x-2}{x+2} = R - (-2)$$

Por tener distinto dominio, la fracción obtenida luego de simplificar no es igual a la fracción dada. Sólo se cumple la igualdad si excluimos el 2 del dominio de la segunda fracción.

Entonces:

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} \text{ para todo } x \neq 2 \longrightarrow \text{condición para poder simplificar}$$

Más sencillo es simplificar en el dominio de la primera fracción, pero es importante darse cuenta de que sólo x = 2 nos lleva a la desigualdad de ambas fracciones.

Vamos a comprobarlo calculando el valor numérico de las dos fracciones para x = 2

$$\frac{2^2-4\,.\,2+4}{2^2-4} = \frac{0}{0} \longrightarrow \text{valor indeterminado} \quad \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

Hemos llegado a resultados distintos Comprueben que para x = -2 no sucede lo mismo

> Para simplificar fracciones algebraicas, factorizamos numerador y denominador y hallamos el dominio de su variable para determinar la condición de posibilidad

Observen esta simplificación que podemos realizar mentalmente:

$$\frac{x^2-25}{x-5} = x+5 \qquad \text{si} \qquad x \neq 5$$

Algunas fracciones algebraicas son equivalentesa expresiones algebraicas enteras o polinomios.

Ejercicios
Simplifiquen e indiquen el dominio de la variable.

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{3x^2 - 3}$ b) $\dfrac{t^4 - 10t^3 - 25t^2}{t^5 - 25t^3}$ c) $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{a x^4 - a - x^4 + 1}$

d) $\dfrac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x^4 - 16}$ e) $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{-2x - 6}$

Multiplicación de expresiones algebraicas racionales

El producto entre dos expresiones algebraicas racionales tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot C(x)}$$

Observen cómo resolvemos una multiplicación:

Ejemplo

$$\left(\frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 9}\right) \cdot \left(\frac{5x + 15}{x^3 - 4x^2}\right) = \frac{-x(x-4) \cdot 5(x+3)}{(x-3)(x+3) \cdot x^2(x-4)} = \frac{-5}{x(x-3)} \qquad \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-3, 4, 0\}$$

División de expresiones algebraicas racionales

El cociente entre dos expresiones algebraicas racionales es el producto de la primera fracción por la inversa de la segunda fracción.

$$\frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{D(x)}{C(x)}$$

Fracciones cuyos términos son fracciones:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Así, el problema queda reducido a una multiplicación.

Ejemplo:

$$\frac{\frac{x+y}{x-3}}{\frac{x-3}{x-y}} \cdot \frac{x^2 - y^2}{4x - 12} = \frac{x+y}{x-3} \cdot \frac{x-y}{x-3} \cdot \frac{4x-12}{x^2 - y^2} =$$

3/4

$$= \frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}\,4\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-3).\cancel{(x-y)}.\cancel{(x+y)}} = \frac{4}{(x-3)}$$ con $x \neq 3$; $x \neq -y$ y $x \neq y$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Resuelve:

a) $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x+1} =$

b) $\frac{x}{x-1} : \frac{x-1}{x+2} =$

c) $x \cdot \frac{3x-1}{2} \cdot \frac{x}{3x-1} =$

d) $\frac{x+4}{x^2-4} \quad \frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2+4x-8} =$

e) $\frac{x+3}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+6x+9}{2x-2} =$

f) $\frac{2x+5}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x-3} : \frac{4x+10}{2} =$

g) $\frac{x^2}{3x-1} : \frac{x-1}{3x-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x} =$

Efectúa las siguientes multiplicaciones y divisiones:

a) $\frac{x^2}{x^2-4} \quad \frac{x+2}{3x^3-x} =$

b) $\frac{2x-1}{x^2-2x+4} \cdot \left(x^3+8\right) \cdot \frac{8x}{2x^3+3x-2} =$

c) $\frac{x^3-8}{x^2-4} : \frac{2x^4+4x^3+8x^2}{2x^3+4x^2} =$

d) $\frac{x^2+x-6}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} =$

e) $\frac{x^2+7x+12}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x^3}{x+4} : \frac{3x+9}{x+1} =$

f) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{9x-6} : \frac{2x+2}{3} \cdot \frac{9x^2-4}{x^2+2x} =$

Fracciones con igual denominador

Tal como se aprendió a sumar o restar números racionales con igual denominador, se puede realizar estas operaciones con expresiones algebraicas.

Para sumar o restar fracciones algebraicas con igual denominador se suman o se restan, respectivamente, los numeradores y se conserva el mismo denominador. Luego, si es posible, se simplifica el resultado.

Ejemplo:

Efectuar: $\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a^2-b^2}$

Solución:

Como el numerador y el denominador tienen factores comunes, se simplifica la expresión.

$$\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a-b}$$

siempre que $a \neq -b$

Ejemplo:

Efectuar: $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{3}{x^2-x-6}$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{3}{x^2-x-6}=\frac{x-3}{x^2-x-6}=\frac{x-3}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

Sustracción de expresiones algebraicas racionales.

La diferencia entre dos expresiones algebraicas racionales es la suma entre la primera y la opuesta de la segunda.

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{C(x)}{B(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}+\frac{-C(x)}{B(x)}$$

Efectúa las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas con igual denominador.

a- $\dfrac{2a}{3xy}+\dfrac{5}{3xy}+\dfrac{4a+16}{3xy}$

b- $\dfrac{2x+1}{4x-1}+\left(\dfrac{6x-3}{4x-1}\right)$

c- $\dfrac{a}{(a-b)^2}-\dfrac{b}{(a-b)^2}=$

d- $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+2}=$

e- $\dfrac{x+1}{x^2-x-6}-\dfrac{5}{x-3}=$

f- $\dfrac{3}{x^2-4}+\dfrac{5}{3x+6}+\dfrac{4}{5x-10}=$

g- $\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=$

h- $\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{2a^2}{a^2+6a+9}-\dfrac{5a}{a+3}=$

i- $\dfrac{12}{x^2+12x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x+2}=$

j- $\dfrac{x+5}{x^2+10x+25}-\dfrac{x+4}{x\ \ -16}=$

k- $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x+1}=$

l- $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x^4-1)}-\dfrac{3x}{x^5-2x^4-x+2}=$

m- $\dfrac{3x^3}{x^2-4}-\dfrac{24x}{x^2-4}+\dfrac{48}{x^3-4x}=$

Fracciones con diferente denominador.

El mínimo múltiplo común de dos o más polinomios se obtiene al factorizar los polinomios y efectuar el producto entre los factores comunes y no comunes con su mayor exponente

$$\frac{12}{x^2+2x}-\frac{2}{x}+\frac{6}{x+2}=\frac{12}{x(x+2)}-\frac{2}{x}+\frac{6}{x+2}=\frac{12-2(x+2)+6x}{x(x+2)}=$$

$$=\frac{12-2x-4+6x}{x(x+2)}=\frac{4x+8}{x(x+2)}=\frac{4\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}}=\frac{4}{x}$$

<u>EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES</u>

1- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}=$

c) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-25}=$

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27}=$

d) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3+x^2-2x}=$

2- Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left(\dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}\right):\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1}=$

b) $\left(\dfrac{3}{x}+2x\right):\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=$

c) $\sqrt{\left(1-\dfrac{x}{x+2}\right):\dfrac{x-2}{2x^2-8}}=$

d) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{1+x}\right)=$

e) $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-6x+9}}{\dfrac{x-2}{x-3}} =$

f) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{x+2}{x^2-x-6}\right)\cdot\dfrac{x^2-9}{4x-10} =$

g) $\dfrac{2x+6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x-7}+\dfrac{x}{x+7}\cdot\dfrac{x-7}{5} =$

h) $\dfrac{x+4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x^2+1}:\dfrac{-x^2-3x+4}{x^4-1} =$

i) $\left[\dfrac{2x^2+1}{3x^2}-\dfrac{2x+1}{4x^2-1}\cdot\dfrac{(2x-1)^2}{3x}\right]:\dfrac{x^2+2x+1}{9x^3} =$

j) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25}:\dfrac{2x-10}{x+5}-\dfrac{5+x}{2x} =$

k) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-2}{\dfrac{x+1}{x^2}}-\dfrac{3x}{x+1} =$

l) $\dfrac{x+2x-3-x(x+3)}{\dfrac{x+3}{(x+4)^2}\cdot\dfrac{4}{x+4}} =$

3) Verifica que:

$\dfrac{a-b+x}{a+b-y} = 1$ para $a=\dfrac{x-y}{2}$

$b=\dfrac{x+y}{2}$

4) Verifica que:

$\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{\dfrac{x}{y}+1} = -\dfrac{b}{a}$ para $x=\dfrac{ab}{a+b}$

para $y=\dfrac{ab}{a-b}$

7/7