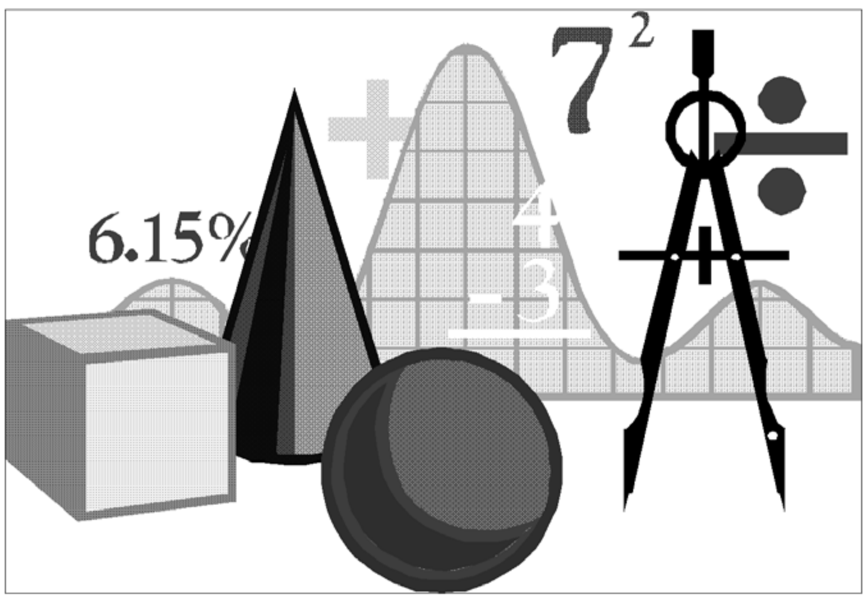
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO

“LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN”

MATEMÁTICA

2° Año



Factorización de polinomios

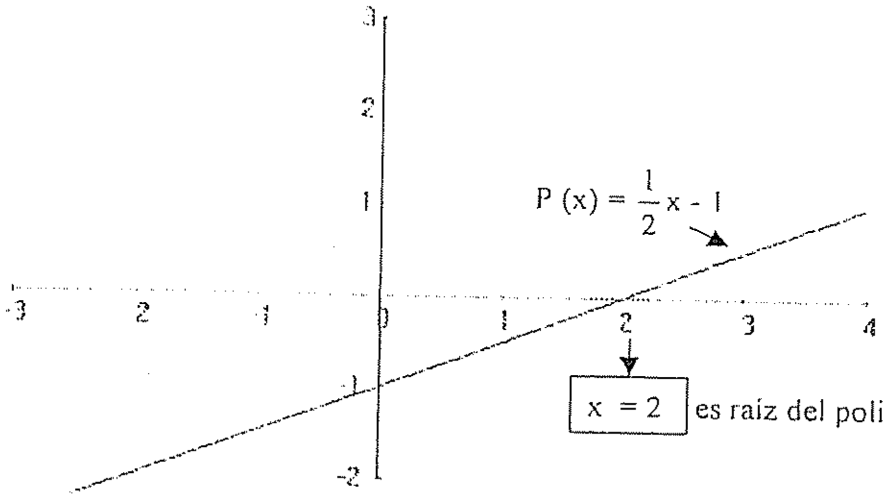
2014

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIO

Raíces de un polinomio:

Sabemos que un número real x = a es una raíz real (o un cero) de un polinomio P (x) si P (a) = 0 (son los valores de "x" en los que el polinomio "se hace cero")
Es decir , las raíces son las intersecciones de los gráficos de y = P (x) con el eje horizontal Se calculan resolviendo la ecuación $\boxed{(P (x) = 0}$

Ejemplos:
1)



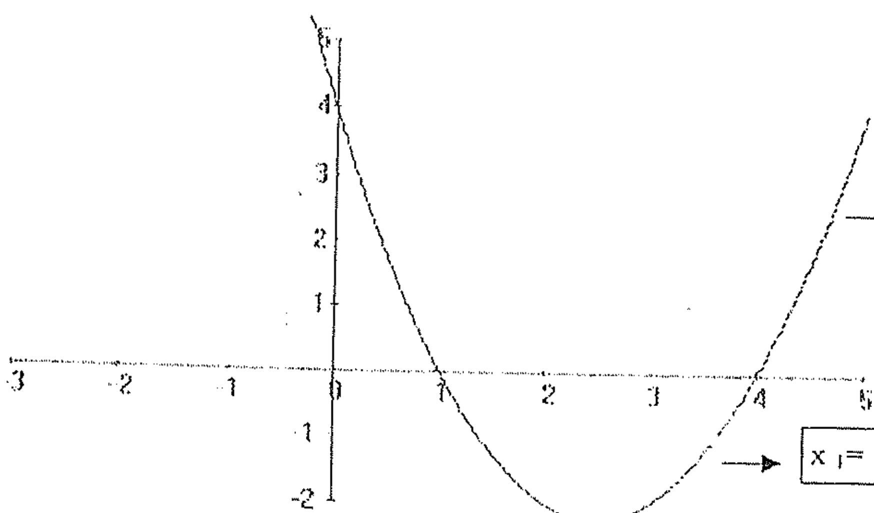
$\boxed{x = 2}$ es raíz del polinomio $P(x) = \frac{1}{2}x - 1$

¿Por qué?

Porque $P_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1$

$\boxed{P_{(2)} = 0}$

2)



$\rightarrow Q(x) = x^2 - 5x + 4$

$\rightarrow \boxed{x_1 = 1}$ y $\boxed{x_2 = 4}$ son raíces del Polinomio $Q(x) = x^2 - 5x + 4$

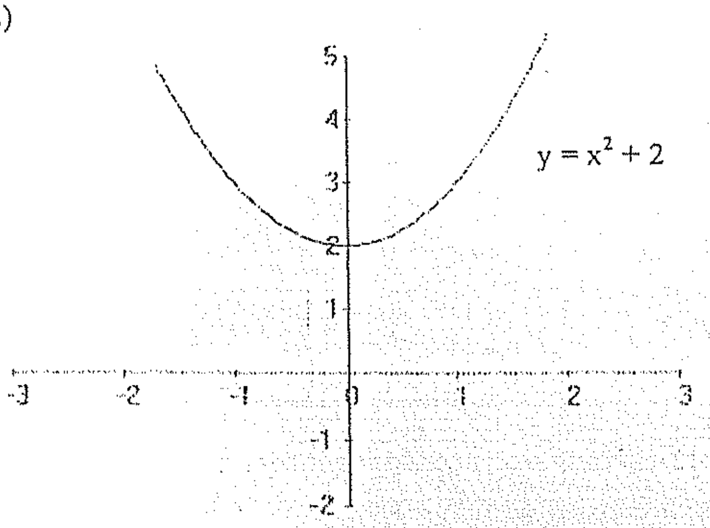
¿Por qué? ....

Observación: la intersección de la parábola con el eje de las abscisas (x) es .... y ....

Ejercicio:

1) ¿Cuáles de los siguientes números reales son raíces del $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$
$x = 0$, $x = 1$, $x = 2$; $x = 3$?

2)



¿El polinomio $y = x^2 + 2$ tiene raíces reales? Justificá tu respuesta

Factorización de polinomios:

¿Qué significa "factorizar" un polinomio?

....

FACTOR COMÚN:

A veces sucede que en un polinomio P (x) la variable *x* figura en todos los términos. En estos casos, es muy conveniente *extraer factor común*.
Observen cómo extraemos la variable *x* como factor común: *la extraemos elevada a la menor de sus potencias*.
También, en algunos ejemplos, hemos extraído un número que es factor en todos los coeficientes.
Después dividimos cada término del polinomio por el factor común

Ejemplos: $E(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3 \, (7x^2 + 5x + 1)$

$F(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2 \, (\ldots\ldots - 3x + \ldots\ldots)$

$G(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = \ldots\ldots \, (-\ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Siempre podemos controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando la propiedad distributiva

DIFERENCIA DE CUADRADOS:

Una diferencia de cuadrados puede escribirse como producto, así:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)}$$

Cuando se nos presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, la pensamos como diferencia de cuadrados

Ejemplos:

$H(x) = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)\,(x + 5)$

$I(x) = x^4 - 36 = (x^2)^2 - 6^2 = (x^2 - 6)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$J(x) = x^2 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (\ldots\ldots - \ldots\ldots)\,(x^2 + 3x)$

$K(x) = x^6 - 16x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Observen que **todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada**

Por ejemplo, $6 = \left(\sqrt{6}\right)^2$. Atentos a esto, podemos pensar $(x^2 - 6)$ como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$$

Por otra parte, muchas veces podemos combinar diferencias técnicas para expresar el polinomio como productos de factores del menor grado posible.

Ejemplo 1: $L(x) = 3x^3 - 12x$

Factor común $3x \longrightarrow L(x) = 3x\,(x^2 - 4)$

Diferencia de cuadrados en $(x - 4) \longrightarrow L(x) = 3x\,(\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)$

Ejemplo 2: $M(x) = x^4 - 81$

Diferencia de cuadrados en $(x^4 - 81) \longrightarrow M(x) = [(x^2)^2 - 9^2] = (x^2 - 9)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 9) \longrightarrow M(x) = (\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Ejemplo 3: $N(x) = 6x^6 - 54x^2$

Factor común $6x^2 \longrightarrow N(x) = 6x^2 \,.\, (x^4 - 9)$

Diferencia de cuadrados en $(x^4 - 9) \longrightarrow N(x) = 6x^2 .\ [(x^2)^2 - 3^2] = \ldots\ (x^2 - 3)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 3) \longrightarrow N(x) = \ldots\ldots\ (\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)$

EJERCICIOS:

Expresá los siguientes polinomios como producto de polinomios del menor grado posible

1) $P(x) = 8x^8 - 8y^8$

2) $Q(x) = x^6 - x^2$

3) $R(x) = 3x^7 - 12x^5$

4) $S(x) = 2x^5 - 32x$

5) $T(x) = -x^3 + 16x$

6) $U(x) = 3x^8 - 3x^2$

FACTOR COMÚN POR GRUPOS

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos

Ejemplo 1: $V(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$

Formamos dos grupos $\longrightarrow$ $V(x) = (7x^5 - 5x^4) + (\ \ldots\ )$

Sacamos *factor común* x^4 en el primer grupo
y *factor común* 2 en el segundo grupo $\longrightarrow$ $V(x) = x^4(\ \ldots\ldots\ ) + 2(\ \ldots\ )$

Sacamos *factor común* $(7x - 5)$ en los dos términos $\longrightarrow$ $V(x) = (7x - 5)(\ \ldots\ )$

Ejemplo 2: $W(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2$

Formamos ...... grupos $\longrightarrow$ $W(x) = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* ...... en el primer grupo $\longrightarrow$ $W(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots + (3x^3 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* ...... en los dos términos $\longrightarrow$ $W(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Puede ocurrir que la *técnica* del factor *común por grupos* esté combinada con algunas de las otras técnicas. En el siguiente ejemplo, $Y(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$, observen con atención cómo el *factor común* (-1) del segundo paso da lugar a la aparición del *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos.

Formamos dos grupos $\longrightarrow$ $Y(x) = (x^6 - x^4) + (\ \ldots\ )$

Sacamos *factor común* x^4 en el primer grupo
y *factor común* (-1) en el segundo grupo $\longrightarrow$ $Y(x) = x^4(\ \ldots\ldots\ ) + (-1)(\ \ldots\ )$

Sacamos *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos $\longrightarrow$ $Y(x) = (x^2 - 1)(\ \ldots\ldots\ )$

Descomponemos la *diferencia de cuadrados*
que apareció en ambos factores $\longrightarrow$ $Y(x) = (\ \ldots\ )(x + 1)(x^2 - 1)(\ \ldots\ )$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 1)$ $\longrightarrow$ $Y(x) = (x - 1)(x + 1)(\ \ldots\ )(\ \ldots\ )(x^2 + 1)$

Finalmente $\longrightarrow$ $Y(x) = (\ \ldots\ldots\ )^2(\ \ldots\ )^2(\ \ldots\ldots\ )$

Ejercicios:

Expresá los siguientes polinomios como producto de polinomios del menor grado posible

$A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

$C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$

$D(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$

$E(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$

$F(x) = 2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2$

$G(x) = x^8 + x^6 - 64x^2 - 64$

$H(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$

Trinomio cuadrado perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cuadrado. Por ejemplo, desarrollaremos $(x + 3)^2$.

Expresamos el cuadrado como producto ⟶ $(x + 3)^2 = (x + 3)\ (\qquad)$

Aplicamos la propiedad distributiva ⟶ $(x + 3)\,.\,(x + 3) = x^2 + x \quad + \quad +$

Agrupamos los términos semejantes ⟶ $(x + 3)^2 = x^2 + \ldots + \ldots$

Al desarrollar $(x + 3)^2$ obtuvimos tres términos:

en uno aparece el *cuadrado de x;*

en otro aparece 9, que es el *cuadrado de 3,*

y en otro aparece $6x$, que es el *doble del producto entre x y 3.*

Si desarrolláramos $(x - 3)^2$, obtendríamos una expresión similar cuya única diferencia estaría en el término del *doble del producto*, que aparecería *restando*:

$$(x + 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Generalicemos estos resultados para el cuadrado de cualquier binomio:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2} \qquad \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2}$$

A estas expresiones se las llama **trinomio cuadrado perfecto.**

Ejemplo: $F(x) = x^2 - 10x + 25$ es un *trinomio cuadrado perfecto?*

$F(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2\,.\,x\ \ 5 + 5^2 = (\ldots\ldots)^2$

Verifiquen que los siguientes polinomios son trinomios cuadrados perfectos y expresen cada uno como un *cuadrado de binomio.*

Ejemplo: ¿$F(x) = x^2 - 10x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto?

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -10x & 25 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (x)^2 & = 2\,.\,x\,.\,(-5) & (-5)^2 \end{array}$$

$\therefore F(x) = (x - 5)^2$

Ejercicios

Expresá los siguientes trinomios, si es posible, como cuadrados de binomios.

$G(x) = x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2\ \ x \quad + \quad {}^2 = (x + \ldots)^2$

$H(x) = 16x^2 - 128x + 256 = \ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots)^2$

$I(x) = x^2 - x + 0{,}25 = \ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots)^2$

$J(x) = 9x^4 + 36x^2 + 36 = \ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots)^2$

$K(x) = x^6 + x^4 + 0{,}25x^2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

$L(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$M(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

$N(x) = x^2 + x + 1$

$O(x) = 25x^6 + 20x^3 + 4$

Cuatrinomio cubo perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cubo Por ej desarrollemos $(a + b)^3$

Expresamos el cubo como producto $(x + 2)^3 = \underbrace{(x + 2)^2}_{(1)} \cdot (\qquad)$

Sabemos que $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

Reemplazamos la expresión anterior en (1) y resulta.

$(x + 2)^3 = (x^2 + 4x + 4)\ (x + 2)$

Aplicamos propiedad distributiva $\longrightarrow$ $(x + 2)^3 = x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$

Agrupamos los términos semejantes $\longrightarrow$ $\boxed{(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

Al desarrollar $(x + 2)^3$ obtuvimos 4 términos:

- en uno aparece el cubo de x $(x)^3$
- en otro aparece el cubo de 2 (8)
- en otro aparece $6x^2$ que es el triplo del producto entre x^2 y 2
- en otro aparece $12x^2$ que es el triplo del producto entre x y 2^2

Es decir $(x + 2)^3 = \underset{(x)^3}{\underset{\downarrow}{x^3}} + \underset{3x^2\ 2}{\underset{\downarrow}{\underbrace{6x^2}}} + \underset{3x\ 2^2}{\underset{\downarrow}{\underbrace{12x}}} + \underset{+\ 2^3}{\underset{\downarrow}{8}}$

generalicemos el resultado para cualquier binomio.

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

A estas expresiones se las llama **cuatrinomio cubo perfecto**

Ejemplo:

¿$F(x) = \underset{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{8}}} + \underset{\underbrace{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 a}}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\frac{3}{4}}a}} + \underset{\underbrace{3\,\frac{1}{2}\,(a)^3}}{\underset{\downarrow}{\underbrace{\frac{3}{2}}a^2}} + \underset{(a)^3}{\underset{\downarrow}{a^3}}$ es un cuatrinomio cubo perfecto?

Sí, podemos escribir entonces. $F(x) = \left(\frac{1}{2} + a\right)^3$

Ejercicios:

Expresá los siguientes trinomios, si es posible, como cubos de binomios:

1) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$

2) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 =$

3) $27y^3 + 27y^2x + 9yx^2 + x^3 =$

4) $1 - x^6 - 3x^2 + 3x^4 =$

5) $\frac{8}{27}b^3 - 2b^2 + \frac{9}{2}b - \frac{27}{8} =$

6) $-1 + 0{,}6\,a^2 + 0{,}008\,a^6 - 0{,}12\,a^4 =$

7) $\frac{1}{27}x^6 + 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 =$

Factoricemos los siguientes polinomios teniendo en cuenta sus raíces:

a) $2x^2 + x - 1 : \longrightarrow$ ¿se puede factorizar?
Busquemos las raíces de este polinomio. Para ello, escribimos los divisores del término independiente -1

$|-1| = \pm 1$

Encontremos la especialización del polinomio $2x^2 + x - 1$ en cada uno de esos divisores, hasta encontrar un valor que sea raíz

$+1 \longrightarrow 2\ 1^2 \cancel{+1} \cancel{-1} =$

$= 2 + 0 = \boxed{2} \longrightarrow +1$ no es raíz

Probemos con (-1)

$-1 \longrightarrow 2\ .\ (-1)^2 + (-1) - 1 =$

$= 2 - 1 - 1 =$

$= 2 - 2 = \boxed{0} \longrightarrow \boxed{-1 \text{ es raíz}}$

$2x^2 + x - 1$ es divisible por $(x + 1)$

Resolvamos la división por Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -1 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \boxed{2x^2 + x - 1 = (2x - 1)\ .\ (x + 1)}$$

polinomio desarrollado polinomio factorizado

b) $\boxed{2x^2 + 2x - 4 = 2\,(x^2 + x - 2)} \longrightarrow$ factor común (1)

¿$x^2 + x - 2$ se puede factorizar?

Busquemos las raíces de este polinomio. Para ello, escribimos los divisores del término independiente -2.

Encontremos la especialización del polinomio $(x^2 + x - 2)$ en cada uno de esos divisores; hasta encontrar un valor que sea raíz.

$(+1)^2 + (+1) - 2 =$

$= 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{+1} \longrightarrow$ es raíz de $(x^2 + x - 2)$

$\therefore (x^2 + x - 2)$ es divisible por $(x - 1)$

Resolvemos la división por Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 1 & -2 \\
1 & & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \boxed{(x^2 + x - 2) = (x - 1)\ (x + 2)} \quad (2)
$$

De (1) y (2) podemos escribir $\boxed{2x^2 + 2x - 4 = 2\,.\,(x - 1)\ (x + 2)}$

polinomio desarrollado   polinomio factorizado

<u>Ejercicios:</u>

Factorizar (teniendo en cuenta las raíces) los siguientes polinomios:

1) $x^3 + x^2 - x - 1 =$

2) $a^3 + 2a^2 - a - 2 =$

3) $m^3 + 4m^2 + m - 6 =$

4) $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 =$

5) $2a^4 + 4a^3 - 4a - 2 =$