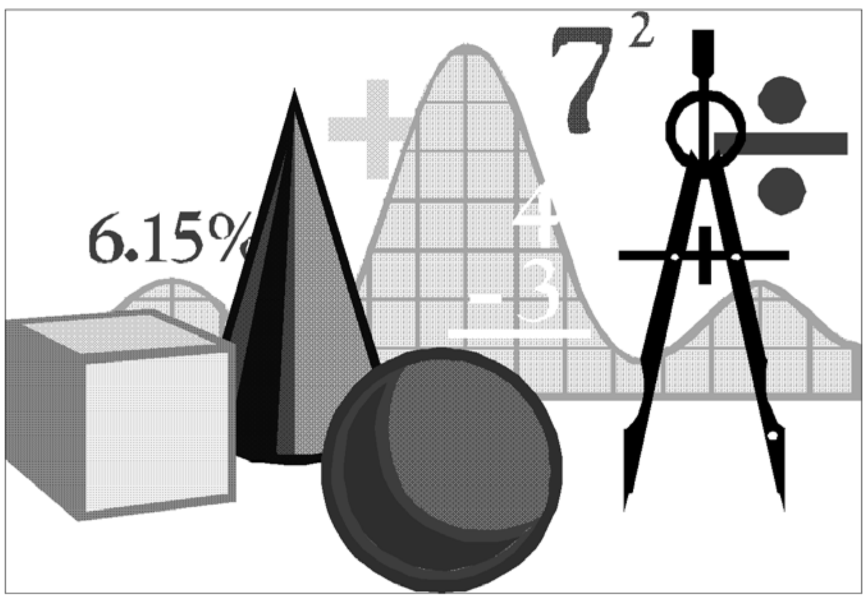
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO

"LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN"

MATEMÁTICA

2° Año



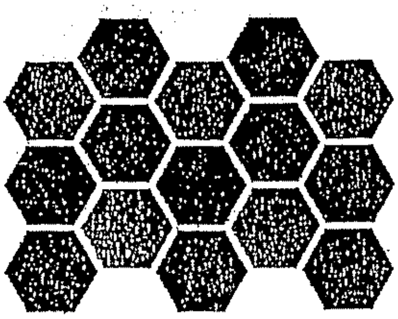
Polígonos

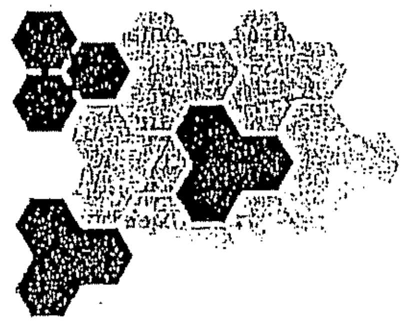
2014

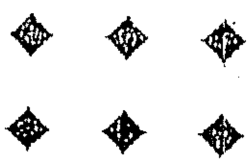
Figuras en el plano

En el diseño de mosaicos la geometría y el arte se relacionan estrechamente.
Un método para construir mosaicos se basa en la repetición sucesiva de polígonos congruentes.

¿Qué clase de polígonos se usaron en el diseño de los siguientes mosaicos?



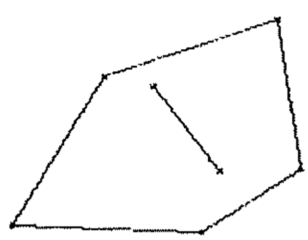


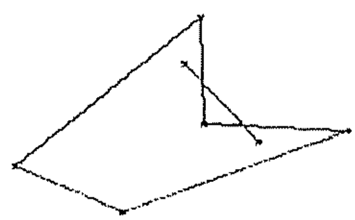


En el primer caso se usaron hexágonos regulares. Partiendo de este diseño se realizó el mosaico formado por dodecágonos que presentamos en la segunda figura. El tercer ejemplo está formado por cuadrados y octógonos, y el último muestra un mosaico realizado a partir de triángulos equiláteros.

RECORDEMOS
Los hexágonos son polígonos que tienen seis lados; los octógonos, ocho y los dodecágonos, doce.

Polígonos
Polígonos convexos y cóncavos





Un polígono es convexo si todo segmento determinado por un par de puntos del polígono está incluido en él.

Un polígono es cóncavo si existe algún segmento determinado por dos puntos del polígono que no esté incluido en él.

De aquí en adelante, cuando hablamos de polígonos nos referimos a polígonos convexos. En caso contrario, diremos polígono cóncavo.

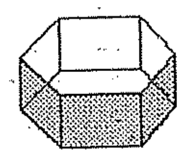
1. Calculen la suma de los ángulos interiores de un eneágono (9 lados).
2. ¿Cuánto vale cada ángulo interior de un octógono regular?
3. La suma de los ángulos interiores de un polígono es de 2160°. ¿Cuántos lados tiene?
4. Un ángulo exterior de un polígono regular es de 40°. ¿De qué polígono se trata?
5. Completen el cuadro:

N° de lados del polígono	N° de diagonales	N° de triángulos que determinan las diagonales que pasan por un vértice	Suma de los ángulos interiores
12			
			2340°
	2		
		8	

6. Completen el siguiente cuadro teniendo en cuenta que los datos corresponden a polígonos regulares:

N° de lados	Suma de los ángulos interiores	Amplitud de un ángulo interior	Amplitud de un ángulo exterior
10			
		160°	
	900°		
			30°

7. ¿Qué ángulo forman entre sí dos caras laterales adyacentes de la caja de la figura si la base es un hexágono regular?



8. ¿En qué polígono la suma de los ángulos interiores es igual al doble de la suma de los ángulos exteriores?

9. ¿Existe algún polígono en el que la suma de los ángulos interiores valga 1960°?

10. En un pentágono abcde: $\hat{a} = 2\hat{c}$, $\hat{b} = \hat{c}$, $\hat{d} = 3\hat{b}$ y $\hat{e} = 134°$. Calculen la amplitud de los ángulos interiores.

11. Si

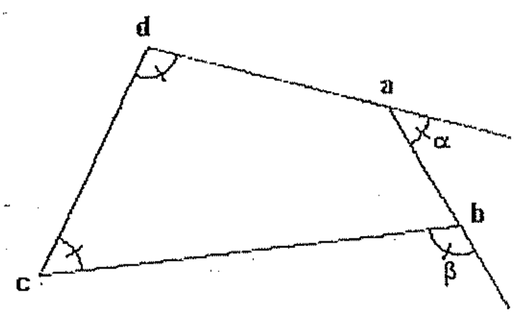
$\hat{\alpha} = 2x$

$\hat{\beta} = 2x + 40°$

$\hat{c} = x$

$\hat{d} = x + 60°$

Calculen los ángulos interiores del polígono abcd y los ángulos α y β.



12. PARA DISCUTIR

Cada ángulo exterior de un polígono regular vale:

a) 180° b) 144°

Calcula el número de lados del polígono.

13. Cada ángulo exterior de un polígono regular vale

a) 14° 24′ b) 13° 20′ c) 22° 30′

Calcula el número de lados del polígono.

14. Determina en cada caso el número de lados del polígono regular de acuerdo con la información dada.

a) El ángulo exterior es $\frac{1}{3}$ del interior adyacente

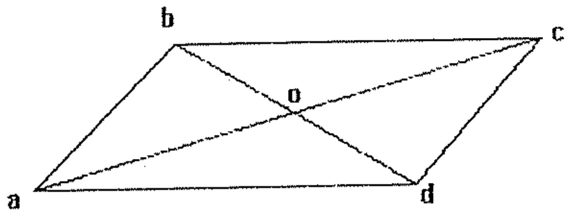
b) El ángulo exterior es $\frac{1}{4}$ del interior adyacente.

Cuadriláteros

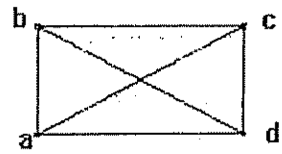
Realiza las demostraciones de las propiedades.

Paralelogramo

- Definición → Cuadrángulo de lados opuestos paralelos
- Propiedades →
  - Lados opuestos Congruentes
  - Ángulos opuestos congruentes
  - Diagonales se cortan en su punto medio
  - Base media paralela y congruente a los lados correspondientes



Rectángulo

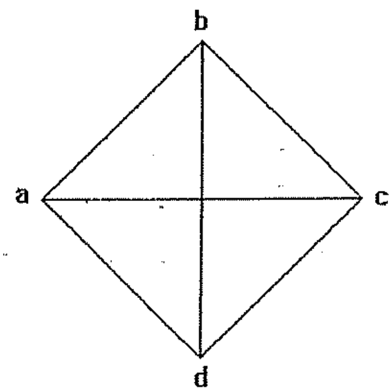


Definición → paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos interiores congruentes

Propiedades:

- lados opuestos congruentes → por se paralelogramo
- diagonales se cortan en su punto medio → por se paralelogramo
- base media congruente y paralela a los lados correspondientes → por se paralelogramo
- diagonales congruentes → por ser rectángulo

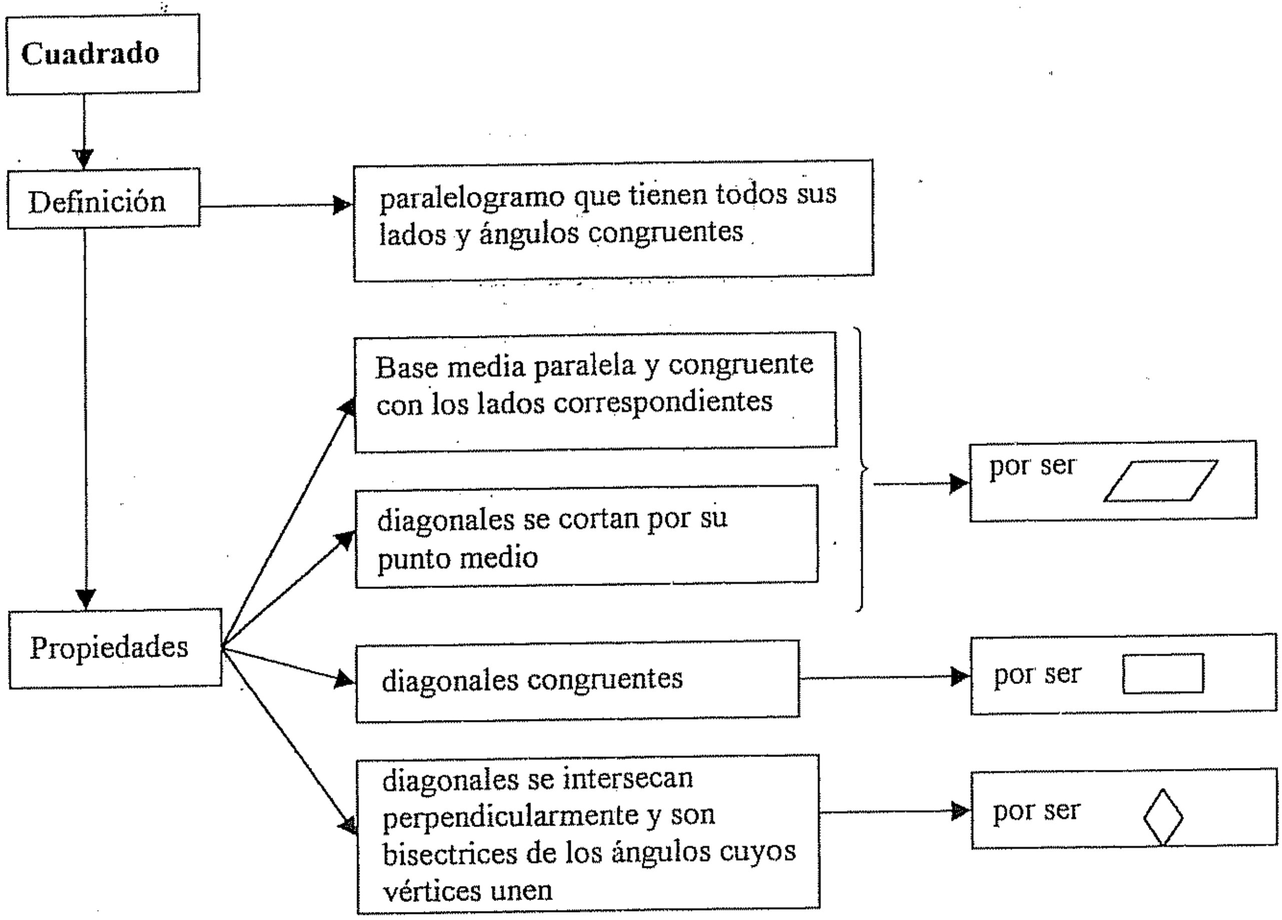
Rombo



definición → paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes

propiedades:

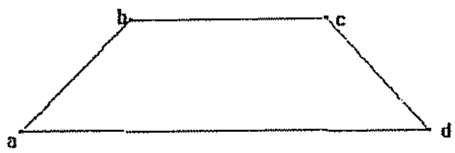
- ángulos opuestos congruentes → por ser paralelogramo
- base media congruente y paralela a los lados correspondientes. → por ser paralelogramo
- diagonales se cortan por su punto medio → por ser paralelogramo
- diagonales se intersecan perpendicularmente y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen → por ser rombo



TRAPECIO

Pasamos ahora a analizar las figuras que sólo tienen un par de lados paralelos, a las que se denomina *trapecio*

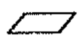
Trapecio es todo cuadrángulo que sólo tiene un par de lados paralelos.



$\overline{bc}$ → base menor

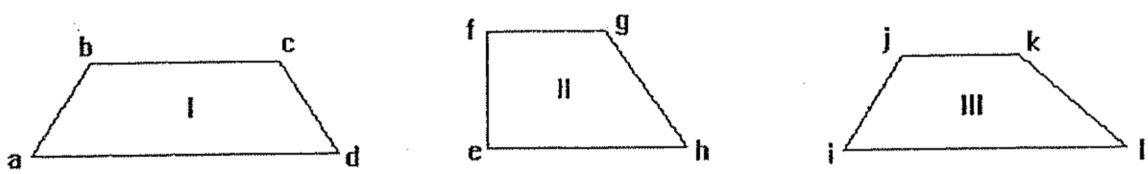
$\overline{ad}$ → base mayor

En símbolos:



abcd $\Leftrightarrow$ $\overline{bc}$ // $\overline{ad}$

Existen distintos tipos de trapecios, observa:



abcd isósceles $\Rightarrow \overline{ab} \cong \overline{cd}$

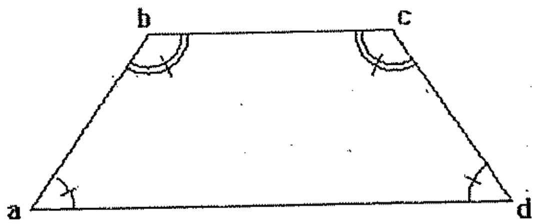
efgh rectángulo $\Rightarrow \hat{e} \cong \hat{f} = 1\ R$

ijll escaleno $\overline{ji} \neq \overline{kl}$

Propiedades de los trapecios

Enunciaremos ahora algunas propiedades que se verifican para los trapecios isósceles.

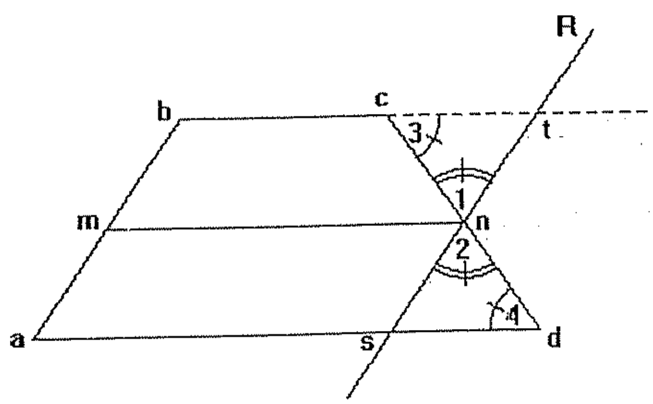
Dibuja un trapecio isósceles, por ejemplo el abcd. Compara los ángulos de sus bases.



¿Cómo resultan $\hat{a}$ y $\hat{d}$? ¿ $\hat{b}$ y $\hat{c}$? Enuncia esta propiedad.

Ahora investiga las diagonales de otro trapecio isósceles; por ejemplo, el mnpq. Traza sus diagonales y compáralas. ¿Cómo resultan?
Compara los segmentos que han quedado determinados sobre cada una de las diagonales al intersecarse.
Estás en condiciones de enunciar una nueva propiedad.

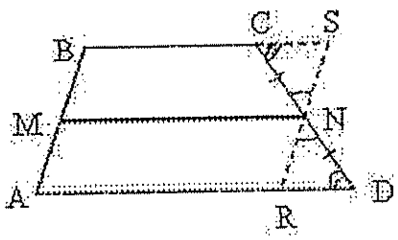
En todo trapecio la base media determinada por los puntos medios de los lados no paralelos es paralela a las bases y congruente con la semisuma de las mismas.



H) abcd trapecio
m punto medio de $\overline{ab}$
n punto medio de $\overline{cd}$
$\overline{mn}$ base media

T) a) $\overline{mn} \parallel \overline{bc}$
b) $\overline{mn} \parallel \overline{ad}$
c) $\overline{mn} \cong \dfrac{\overline{ad} + \overline{bc}}{2}$

TEOREMA



H) Trapecio ABCD
$\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, bases
MN, base media

T) 1° $\overline{MN}$ // $\overline{AD}$ y $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$

2° $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

Demostración: Trazando por N una paralela a $\overline{AB}$, dicha paralela corta a $\overline{AD}$ en R y a la prolongación de $\overline{BC}$ en S, quedando formados los triángulos

$\overset{\Delta}{NRD}$ y $\overset{\Delta}{NSC}$ que tienen
- $\overline{ND} = \overline{CN}$ por ser N el punto medio del lado $\overline{CD}$ por definición de base media
- $R\hat{N}D = C\hat{N}S$ por ser opuestos por el vértice
- $N\hat{D}R = S\hat{C}N$ por ser alter. int er. entre $\overline{BS}$ // $\overline{AD}$ y trasv. $\overline{CD}$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales.

En consecuencia, los lados que se oponen a los ángulos iguales, son iguales, entre ellos

$$\overline{NR} = \overline{SN} \qquad (1)$$
$$\text{y } \overline{RD} = \overline{CS} \qquad (2)$$

Como por la igualdad (1) $\overline{NR}$ y $\overline{SN}$ son iguales, N es punto medio del $\overline{SR}$, y como M es punto medio de $\overline{AB}$, resulta $\overline{MN}$ base media del paralelogramo $\square$ABSR y, en consecuencia, como la base media de un paralelogramo es paralela a las bases, se tiene:

$$\overline{MN} \;//\; \overline{BS} \text{ y } \overline{MN} \;//\; \overline{AR}$$

o sea:

$$\overline{MN} \;//\; \overline{BC} \text{ y } \overline{MN} \;//\; \overline{AD}$$

con lo que queda demostrada la primera parte de la tesis.

Pero la base media de un paralelogramo es también igual a las bases;

Luego:

$$\overline{MN} = \overline{AR} \qquad (3)$$
$$\overline{MN} = \overline{BS}$$

Los segmentos $\overline{AR}$ y $\overline{BS}$ se pueden expresar como suma y diferencia haciendo intervenir las bases del trapecio dado, del siguiente modo:

$$\overline{AR} = \overline{AD} - \overline{RD}$$
$$\overline{BS} = \overline{BC} + \overline{CS}$$

reemplazando estos segmentos en las igualdades (3), se tiene:

$$\overline{MN} = \overline{AD} - \overline{RD}$$
$$\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{CS}$$

Sumando m. a m.: $\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{AD} - \overline{RD} + \overline{BC} + \overline{CS}$

En el segundo miembro pueden reducirse $\overline{RD}$ y $\overline{CS}$ que son iguale, según (2),
Es decir:

$$\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{AD} - \cancel{\overline{RD}} + \overline{BC} + \cancel{\overline{CS}}$$
$$\overline{MN} + \overline{MN} = 2\ \overline{MN}$$

reemplazando resulta: $2\ \overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$

pasando el factor 2 al segundo miembro, como divisor, se tiene:

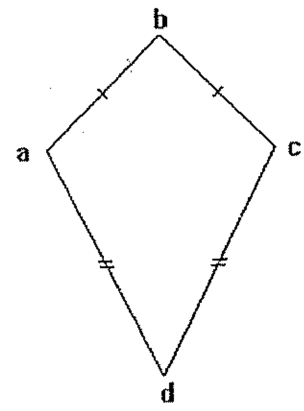
$$\overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$$

que es la segunda parte de la tesis.

Luego el teorema queda demostrado.

ROMBOIDE

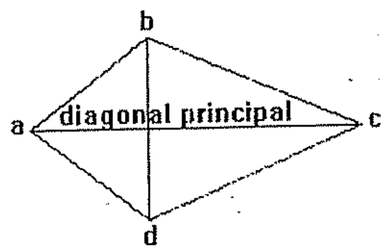
Romboide es el cuadrángulo que tiene un par de lados consecutivos congruentes y distintos de los otros dos que son congruentes entre sí.



En símbolos:

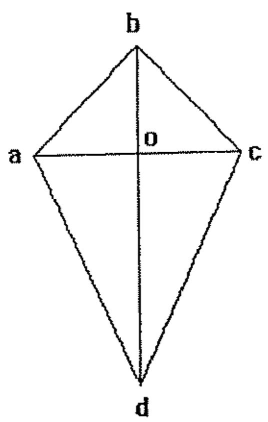
Romboide abcd $\Leftrightarrow \overline{ab} \cong \overline{bc} \wedge \overline{ad} \cong \overline{cd} \wedge \overline{ab} \ncong \overline{ad}$

La diagonal que une los vértices donde concurren los lados congruentes se llama *diagonal principal*.



Propiedades del romboide

Dibuja un romboide , traza sus diagonales.



La diagonal principal del romboide corta perpendicularmente a la otra diagonal en partes congruentes.

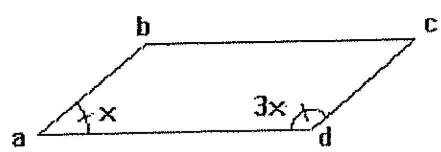
la diagonal principal del romboide es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.

EJERCICIOS:

1- Datos: abcd paralelogramo

$\hat{a} = x$

$\hat{d} = 3x$



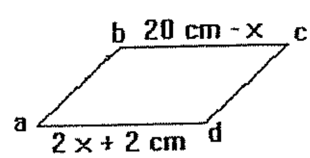
Calcula el valor de los cuatro ángulos.

2- Datos: abcd paralelogramo

Per. Abcd = 50 cm

$\overline{bc} = 20 \text{ cm} - x$

$\overline{ad} = 2x + 2 \text{ cm}$



Calcula el valor de cada lado.

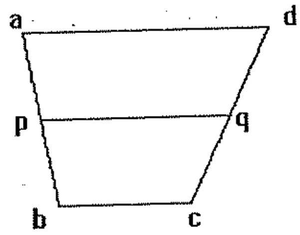
3- Datos:

$\overline{bc} = \dfrac{x}{5}$

$\overline{ad} = x$

$\overline{pq} = x - 8\ \text{cm}$

Calcula: $\overline{ad}$ y $\overline{pq}$

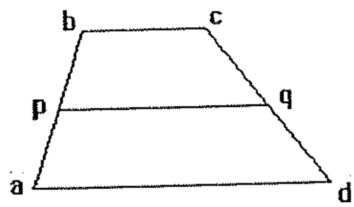


4- Datos:

$\overline{bc} = 13\ \text{cm}$

$\overline{pq} = 18\ \text{cm}$

Calcula: $\overline{ad}$



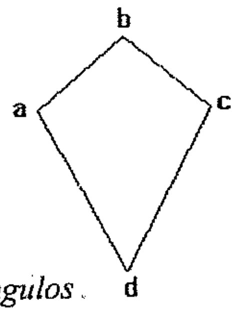
5- Datos: abcd romboide

$\hat{b} + \hat{d} = 136°$

$\hat{b} = x + 32°$

$\hat{d} = x + 10°$

Calcula el valor de los cuatro ángulos.



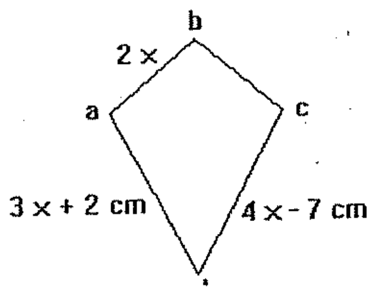
6- Datos: abcd romboide

$\overline{ab} = 2\,x$

$\overline{ad} = 3\,x + 2\ \text{cm}$

$\overline{cd} = 4\,x - 7\ \text{cm}$

Calcula: Per. abcd



7- Datos:

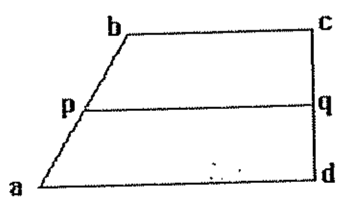
$\overline{ab} = x$

$\overline{cd} = x + 5$

$\overline{pq} = 2\,x$ (base media)

Per. abcd = 17 cm

Calcula: $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ y $\overline{pq}$



8- Datos:

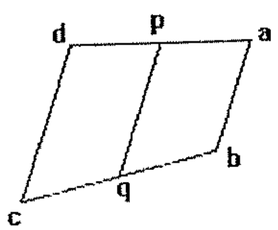
abcd trapecio

$\overline{pq}$ base media

$\overline{pq} = 6\ \text{cm}$

$\overline{ad} = 3\ \text{cm}$

$\overline{cb} = 5\ \text{cm}$



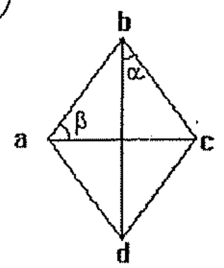
Calcula el perímetro del trapecio.

9- En un paralelogramo se verifica que dos de sus ángulos adyacentes son tales que uno es igual a los $\frac{5}{4}$ del otro. Calcula la amplitud de sus ángulos interiores.

10- En un rombo una diagonal forma con uno de los lados un ángulo de 37°. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos interiores del rombo?

11- Calcula los ángulos señalados en las figuras.

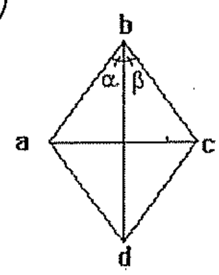
(A)



Datos $\begin{cases} \text{abcd rombo} \\ \hat{\alpha} = x + 20° \\ \hat{\beta} = 2x + 10° \end{cases}$

Calcula $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$

(B)



Datos $\begin{cases} \text{abcd rombo} \\ \hat{\alpha} = 2x + 15° \\ \hat{\beta} = x + 30° \end{cases}$

Calcula $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$

12- En un rombo los ángulos que las diagonales forman con un lado son tales que uno de ellos supera en 30° al quíntuplo del otro. Calcula la amplitud de los ángulos interiores de dicho rombo.

13- Calcula los ángulos interiores de un trapecio isósceles sabiendo que la diferencia entre dos ángulos adyacentes es de 38 °.

14- Determina la amplitud de los ángulos interiores de un trapecio isósceles, en el cual los dos ángulos exteriores adyacentes al lado oblicuo son tales que uno es igual a los $\frac{3}{5}$ del otro.

15- La base media de un trapecio es igual a 10 cm y la diferencia entre las bases del mismo es igual a 4 cm. Calcula la longitud de cada una de las bases del trapecio.

16- Datos:

abcd romboide

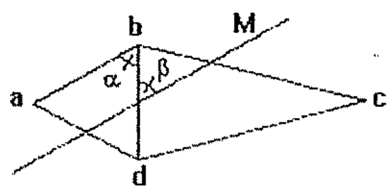
$M \parallel \overline{ab}$

$\overline{bd}$ diagonal del abcd

$\hat{\alpha} = 2x + 30°$

$\hat{\beta} = x + 40°$

$\hat{b} = \frac{3}{2}\hat{a}$



Calcula $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$

17- Datos:

abcd trapecio isósceles

$\overline{ab} = \overline{cd}$ $\overline{mn}$ base media

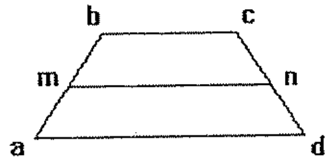
$\overline{bc} = x - 2$ cm

$\overline{mn} = x + 4$ cm

$\overline{ad} = 2x$

perímetro abcd = 40 cm

Calcula $\overline{ab}$ *y* $\overline{cd}$



18- Datos:

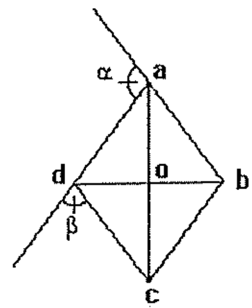
abcd rombo

$\overline{bd}$ y $\overline{ac}$ diagonales

$\overline{bd} \cap \overline{ac} = (o)$

$\hat{\alpha} = x + 12°$

$\hat{\beta} = 2x + 18°$



Calcular los ángulos interiores de $\overset{\triangle}{cod}$

19- La base media principal de un trapecio es igual a los Lados no paralelos. Si el perímetro es de 64 cm. ¿Cuál es la longitud de la base media?

$\overline{ab} \cong \overline{cd} \cong \overline{pq}$