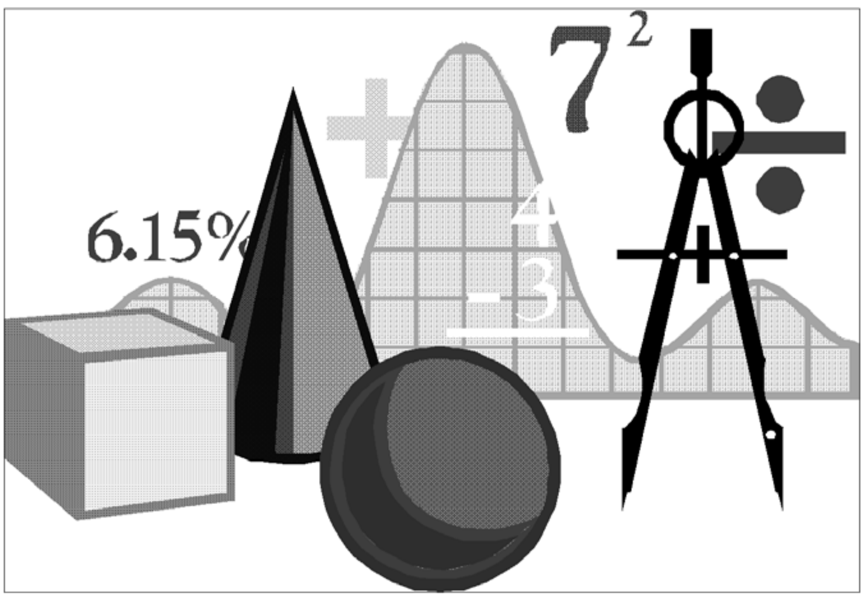
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO

"LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN"

MATEMÁTICA

2° Año



Polinomios

2014

FUNCIÓN POLINÓMICA. POLINOMIOS

El depósito subterráneo

En una fábrica se debe construir un depósito subterráneo para instalar en él un tanque de combustible. Hay tres modelos de tanque: chico, mediano y grande. Cada uno de ellos requiere un depósito de forma cúbica de arista igual a 1 m, 2 m y 3 m, respectivamente.

El depósito debe quedar enterrado en el suelo. Su parte superior, que es descubierta, estará al ras de la tierra. Su piso y sus cuatro paredes se cubrirán con planchas de fibrocemento, y todas las junturas entre esas planchas irán selladas con unos listones especiales de hierro.

La fábrica dispone de hasta \$ 6 600 para construir el depósito.

Los costos son los siguientes: \$ 400 por metro cúbico excavado, \$ 120 por metro cuadrado de plancha de fibrocemento y \$ 40 por metro (lineal) de listón de hierro. Además, hay que agregar un gasto fijo de \$ 170 en concepto de flete.

¿Cuál de los tres depósitos puede construirse con ese presupuesto? Para saberlo, buscaremos una fórmula para el costo de construcción, en función de la arista x del depósito, en metros.

Analicemos en forma separada cada uno de los gastos.

- Por un lado tenemos el flete, cuyo costo de \$ .... es constante.
- Como el depósito es cúbico, todas las aristas son ....; entonces, el volumen del depósito en m^3 es: $V = x \cdot x \cdot x =$ ....

El costo del metro cúbico excavado es de \$ 400; por lo tanto, el costo total del volumen excavado es: $C_V =$ ....

- El depósito tiene un total de .... caras para cubrir con las planchas de fibrocemento. La superficie de cada plancha en m^2 es:

$$S = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots^2$$

El costo del metro cuadrado de fibrocemento es de \$ .... Entonces, el costo de una plancha es: $C =$ ...., y el costo de todas las planchas es:

$$C_P = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

- El depósito tiene un total de .... junturas entre todas sus caras. El costo del metro lineal de cada listón de hierro es de \$ .... Un listón que cubre una juntura cuesta: $C =$ ...., y el costo de todos los listones es:

$$C_L = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Traslademos los valores anteriores a esta tabla:

[illegible]	[illegible]
Flete	170
Listones de hierro	$320x$
Planchas de fibrocemento	$600x^2$
Excavación	$400x^3$
Costo total	$400x^3 + 600x^2 + 320x + 170$

A cada uno de los términos escritos en azul se lo denomina monomio, y a la suma de ellos, en color rojo, se la llama polinomio.

El costo total de la construcción puede expresarse mediante la fórmula:

$$C(x) = 400x^3 + 600x^2 + 320x + 170$$

Escribimos $C(x)$ porque el costo *es función* de la longitud x de la arista del depósito.
Calculemos el costo total para aristas de 1 m, de 2 m y de 3 m:

$C(1) = 400 \cdot 1^3 + 600 \cdot 1^2 + 320 \cdot 1 + 170 = \ldots\ldots$

$C(\ldots) = 400 \cdot \ldots^3 + 600 \cdot \ldots^2 + 320 \cdot \ldots + 170 = \ldots\ldots$

$C(\ldots) = 400 \cdot \ldots^3 + 600 \cdot \ldots^2 + 320 \cdot \ldots + 170 = \ldots\ldots$

La empresa podrá construir el depósito que albergue el tanque ……

Polinomios

Observen la expresión $P(x) = -5x^4 + 2x^3 + 4x$. No podemos reducirla a un solo término, ya que las x tienen diferentes exponentes. $P(x)$ es la suma de varios monomios, y le damos el nombre de ***polinomio***.

Los **polinomios** que estudiaremos son expresiones de la forma:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

donde $a_n, \ldots, a_0$ son números reales constantes, llamados ***coeficientes***, x es la ***indeterminada***, y los exponentes de cada una de las x $(n, n-1, \ldots, 2, 1, 0)$ son números naturales constantes.

Ejemplo 1: $A(x) = 7x^4 + 5x + 2$ es un polinomio, pues los exponentes de las x son números …… .

Ejemplo 2: $B(x) = \frac{5}{4}x^5 + x^{-2}$ no es un polinomio, pues uno de los exponentes no es un número …… .

Ejemplo 3: $C(x) = -4x^8$ es un polinomio de un solo término, llamado también …… .

Ejemplo 4: $D(x) = 5x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 - 3$ no es un polinomio, porque ……

…… .

Ejemplo 5: $E(x) = 2x^6 + 3x^4 - x^3 + \frac{2}{x}$ no es un polinomio, porque ……

…… .

Así como a los polinomios de un solo término se los llama **monomios**, a los polinomios de dos términos se los llama **binomios** y a los de tres, **trinomios**.

Grado y características de los polinomios

El exponente del monomio de mayor grado de un polinomio nos indica el grado de ese polinomio.

Ejemplo: $P(x) = -4x^7 + 5x^4 - x^2 + 4x - 6$ es un polinomio de grado ……, $Q(x) = 7x^2 - 9$ es un polinomio de grado ……, $M(x) = 2x + 5$ es un polinomio de grado …… y $T(x) = 8$ es un polinomio de grado …… . Es decir que las **constantes** no nulas son polinomios de grado …… .

En particular, $P(x) = 0x^n + \ldots + 0x + 0$, es decir, $P(x) = 0$ se llama ***polinomio nulo***, **y no tiene grado.**

Éstas son algunas de las **características** de los **polinomios:**

- El coeficiente del monomio de mayor grado es el ***coeficiente principal.***
- Un polinomio es ***mónico*** cuando su coeficiente principal es 1.
- Al término a_0 se lo llama ***término independiente.***
- Un polinomio está ***ordenado*** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. Nosotros ordenaremos los polinomios en forma **decreciente.**

Especialización de un polinomio

En un polinomio $P(x)$, x es la *indeterminada*. Cuando le asignamos *un valor determinado*, decimos que el polinomio $P(x)$ está ***especializado*** en ese valor.

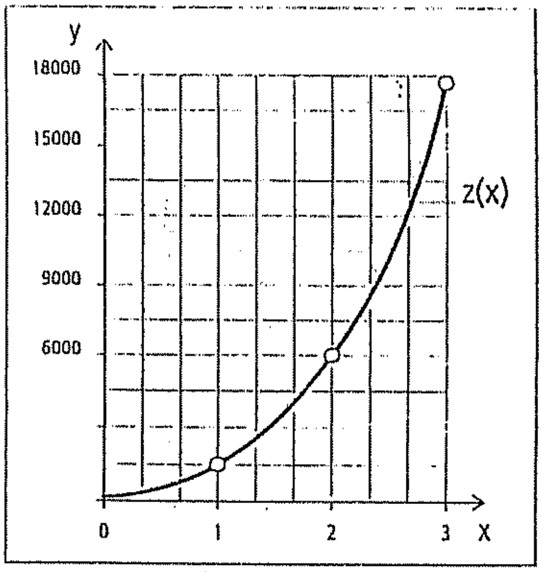
Polinomio		Polinomio especializado en
$F(x) = 3x^4 + x^2 - 5$	$x = 1$	$F(1) = 3 \cdot 1^4 + 1^2 - 5 =$ ....
$G(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x$	$x = 2$	$G(2) =$ ....
$H(x) = 2x^7 + x^6 - x^5 + 3x^2 + 4$	$x = -1$	H(......) = ...

En el problema de la página 1 tuvimos que especializar el polinomio del costo:

$C(x) = 400x^3 + 600x^2 + 320x + 170$ en $x = 1$, en $x = 2$ y en $x = 3$, y así obtuvimos las respectivas *imágenes*:

$C(1) = 1\,490$, $C(2) = 6\,410$ y $C(3) = 17\,330$

Si consideramos una nueva función $Z(x)$ que tenga la misma fórmula que $C(x)$ y con dominio en $[0; 3]$, obtenemos el siguiente gráfico:



Funciones polinómicas

Cada polinomio que estudiaremos tiene asociada una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, llamada **función polinómica**. Nosotros hablaremos indistintamente de polinomios o de funciones polinómicas.

Si consideramos el conjunto $\mathbb{R}$ como **dominio** de las funciones polinómicas, la imagen de cada una de ellas puede no ser $\mathbb{R}$, tal como vimos al estudiar las funciones potenciales, que son un caso particular de las funciones polinómicas.

Estas funciones, cuyos gráficos son curvas que no presentan "saltos", son muy utilizadas por su simplicidad y tienen suma importancia en disciplinas como la Biología, la Física, la Química, la Economía, etcétera.

Suma y resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es un polinomio. Consideremos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$: los coeficientes del resultado se obtienen sumando o restando los coeficientes respectivos de iguales potencias de la indeterminada en las expresiones de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo 1: Vamos a calcular la suma de los polinomios: $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 5x^3 - 7x + 8$

Una forma práctica es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo completamos escribiendo dicho término con coeficiente 0.
Encolumnamos P(x) y Q(x) para que resulte cómodo sumar los coeficientes:

$P(x) =$		$3x^2$	....	$+ 1$
+ $Q(x) =$	$5x^3$	....	$-7x$	$+ 8$
$P(x) + Q(x) =$	....	....	$-5x$	....

Siempre supondremos que los términos que faltan tienen coeficiente 0, como es el caso de $0x^3$ en P(x).

Ejemplo 2: Calculemos $A(x) - B(x)$ siendo $A(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8$ y $B(x) = 5x^4 - 4x^3 + 5$
Completamos y encolumnamos A(x) y B(x) para restarlos:

$A(x) =$	....	....	....	....	....	....
− .... =		....	....	....	....	....
$A(x) - B(x) =$	....	....	....	....	....	....

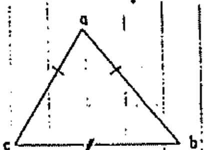
El resultado de la suma o de la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tener grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

1) Dados:
$$A(x) = 12x^2 - 6x + x^5 - 2x^3$$
$$B(x) = 5x^6 - 7x^2 + 3x - 4x^3$$
$$C(x) = \frac{12}{9} + 12x^3 - x^5$$
$$D(x) = 2x^2 + 0{,}5x^4 - 3$$

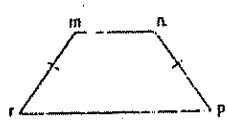
Calcular:
a) $[B(x) - A(x)] + C(x)$
b) $A(x) + B(x) + C(x) + D(x)$
c) $[C(x) - D(x)] + A(x)$

2) • Escriban el polinomio reducido del perímetro de cada una de las siguientes figuras.

a) $\begin{cases} \overline{ac} = 2x^2 - 3x + 4 \\ \overline{cb} = x^2 - 5x + 2 \end{cases}$



b) $\begin{cases} \overline{mn} = x^2 + 5x - 5 \\ \overline{np} = 2x^2 - 10x + 3 \\ \overline{rp} = \frac{3}{2}\,\overline{mn} \end{cases}$



Multiplicación de polinomios

PARA OBSERVAR

Para multiplicar dos monomios multiplicamos sus coeficientes y aplicamos las propiedades de la potenciación para obtener el grado.

Por ejemplo: $(3x^5) \cdot (4x^6) = 12x^{11}$

Para multiplicar dos polinomios aplicamos la propiedad distributiva.

Por ejemplo: $(-8x^3 + 5x + 3) \cdot (4x^2 + 3x) = -32x^5 - 24x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 12x^2 + 9x$

$= -32x^5 - 24x^4 + 20x^3 + 27x^2 + 9x$

Cuando ambos tengan varios términos, puede resultar conveniente disponerlos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -8x^3 & + \; 5x & + \; 3 & \\
\times & & & 4x^2 & + \; 3x & \\
\hline
 & -24x^4 & & + \; 15x^2 & + \; 9x & \\
-32x^5 & & + \; 20x^3 & + \; 12x^2 & & \\
\hline
-32x^5 & - \; 24x^4 & + \; 20x^3 & + \; 27x^2 & + \; 9x &
\end{array}$$

1- Resuelvan.

a) $(2x^3) \cdot (-4x^2) =$ ....

b) $(3x^2) \cdot \left(\frac{1}{6}x^2\right) =$ ....

c) $(2x) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) =$ ....

d) $(3x^2 - 4x) \cdot (5x^2 + x) =$ ....

2- Completen, sabiendo que los grados de los polinomios M y N son 3 y 2, respectivamente.

a) El grado de $M \cdot N$ es ....

b) El grado de $M + N$ es ....

c) El grado de $M - N$ es ....

3 Consideren los siguientes polinomios.

$A(x) = x^2 + 3x - 1$ $B(x) = x + 3$ $C(x) = 5x^3 - 3x + 4$ $D(x) = x - 3$

Efectúen los siguientes productos.

a) $A(x) \cdot B(x)$ c) $B(x) \cdot A(x)$ e) $B(x) \cdot B(x)$

b) $A(x) \cdot D(x)$ d) $C(x) \cdot C(x)$ f) $A(x) \cdot B(x) \cdot D(x)$

4- Multipliquen los siguientes binomios y descubran una regla general.

a) $(x + 4) \cdot (x + 4)$ b) $(x - 4) \cdot (x - 4)$ c) $(x^3 + 6) \cdot (x^3 + 6)$ d) $(x^3 - 6) \cdot (x^3 - 6)$

5- Multipliquen los siguientes binomios y descubran una regla general.

a) $(x + 8) \cdot (x - 8)$ b) $(x - 4) \cdot (x + 4)$ c) $(x^3 + 2) \cdot (x^3 - 2)$ d) $(x^5 - 3) \cdot (x^5 + 3)$

6- Multipliquen los siguientes binomios y descubran una regla general

a) $(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b)$ b) $(c-d) \cdot (c-d) \cdot (c-d)$

7- Determinar, si existen, a, b y c en $\mathbb{R}$ de modo que:

a) $9x^2 - 16x + 4 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$

b) $x + 2 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x-1)$

5/8

División entera de polinomios

OBSERVAR PARA

Siendo $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 - 2$ para calcular $P(x) : Q(x)$, podemos hacer así:

- Ordenamos en forma decreciente y completamos el polinomio dividendo.
- Dividimos el monomio de mayor grado del dividendo con el monomio de mayor grado del divisor: $(4x^3) : (x^2) = 4x$
- Multiplicamos este resultado por el divisor y lo escribimos debajo del dividendo con los signos cambiados para poder sumarlos.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
4x^3 & + & 5x^2 & + & 0x & + & 1 & & x^2 - 2 \\
\cline{9-9}
-4x^3 & & & + & 8x & & & & 4x + 5 \\
\cline{1-7}
\cancel{0x^3} & + & 5x^2 & + & 8x & + & 1 & & \downarrow \\
 & & -5x^2 & & & + & 10 & & \text{cociente} \\
\cline{1-7}
 & & \cancel{0x^2} & + & \underbrace{8x & + & 11}_{\text{resto}} & & \\
\end{array}
$$

- Repetimos el procedimiento hasta obtener un resto de menor grado que el divisor.
- Comprobamos: $4x^3 + 5x^2 + 1 = (4x + 5)\ (x^2 - 2) + (8x + 11)$

1- Resuelvan las siguientes divisiones. Indiquen el cociente y el resto de cada uno y realicen la comprobación.

a) $(3x^2 + 2x - 1) : (4x)$ **b)** $(6x^3 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$ **c)** $(4x^2 + 5x - 6) : (2x + 4)$

2-

a) M y N son polinomios. Si el grado de M es 7 y el grado de N es 2, ¿cuál es el grado del cociente entero entre M y N? ....

b) Si el grado del cociente entre dos polinomios M y N es 4, ¿cuál es la relación entre los grados de M y N? ....

3- Indiquen si cada afirmación es verdadera o falsa y justifiquen la respuesta.

a) $(x - 1)$ es divisor de $(x^3 + 2x - 3)$

....

b) $(x^4 + 3x^2 - 4)$ es múltiplo de $(x + 1)$

....

c) $(x^2 + 3x - 1)$ divide a $(x^3 + 3x^2 - x)$

....

d) El resto de dividir $(x^4 + 16)$ por $(x - 2)$ es cero.

....

e) La división $(3x^3 + 8x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$ es exacta.

....

4- Dividir los siguientes polinomios, indicando cociente y resto

a) $(x^5 + x^3 + 1) : (x^2 + 1) =$

b) $(x^6 + 2x^4 - 14x^2 + 6) : (x^2 + 5) =$

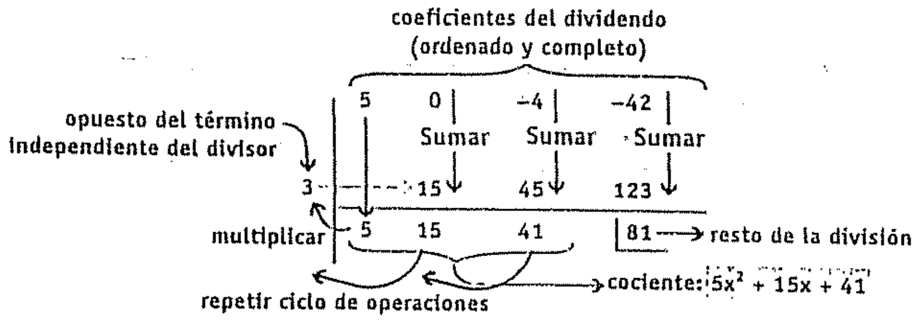
c) $(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1) =$

RECORDAR

PARA LEER

La *regla de Ruffini* es un método "abreviado" de efectuar la división de polinomios, que se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - a$, siendo a un número real.

En el ejemplo se muestra cómo se aplica para resolver la división: $(5x^3 - 4x - 42) : (x - 3)$.



El cociente siempre resulta de un grado menor que el dividendo.

1- Utilicen la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones. Indiquen el cociente y el resto en cada caso y realicen la comprobación.

a) $(8x^2 - 3x + 4) : (x - 4)$
b) $(5x^2 - 1) : (x - 5)$
c) $(x^3 - 3x - 30) : (x + 2)$
d) $(1 + x^2) : (x - 1)$
e) $(x^2 + x^3 - 2) : (x + 3)$
f) $(10x^3 - 6) : (x + 3)$
g) $(10x + x^2 + 25) : (x + 5)$
h) $(x^4 - 81) : (3 + x)$

Valor de un polinomio para $x = a$. Raíz de un polinomio

RECORDAR

PARA LEER

Llamamos *valor de un polinomio para* $x = a$, y lo escribimos $P(a)$, al número que resulta al reemplazar por el número a la variable x del polinomio y resolver todas las operaciones indicadas.

Si $P(a)$ es cero, decimos que a es *raíz* de $P(x)$.

Ejemplo: $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$P(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 5$

$P(-1) = -4$

$P(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5$

$P(1) = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$

4- Consideren los siguientes polinomios.

$P(x) = x^2 - 5x + 4$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$

$R(x) = -4x^2 + 10x - 4$

$S(x) = 16x^4 + 8x + 3$

Hagan los cálculos necesarios e indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

a) $P(0) = 4$
b) $Q(1) = 6$
c) $P(1) = Q(-1)$
d) $S(1) = 9 \cdot Q(-1)$
e) $R(0) = -P(0)$
f) $R(3) + P(-1) = R\left(\frac{1}{2}\right)$
g) $S(1) - S(-1) = P(-1) - Q(1)$
h) 0 es raíz de R.
i) -4 no es raíz de S.

Teorema del resto

RECORDAR

PARA LEER

Si dividimos un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, el resto de dicha división es igual a $P(a)$, es decir, al valor de $P(x)$ en $x = a$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-a) \\ \hline R & Q(x) \end{array} \Rightarrow Q(x) \cdot (x-a) + R = P(x)$$

Reemplazando todas las x por a.

$$Q(a) \cdot (a-a) + R = P(a)$$
$$Q(a) \cdot 0 + R = P(a)$$
$$R = P(a)$$

El teorema del resto es muy útil porque nos permite calcular directamente el resto de una división sin hacerla y, en particular, anticipar si una división es exacta.

1 Calculen el resto de las siguientes divisiones, sin hacerlas.

a) $(5x^2 + 3x - 14) : (x - 2)$ ....

b) $(4x^2 - 3) : (x - 5)$ ....

c) $(x^3 + x - 5) : (x + 2)$ ....

d) $(1 + x^4) : (x - 4)$ ....

e) $(x^2 + x^3 - 2) : (x + 1)$ ....

f) $\left(x^3 - \frac{1}{27}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$ ....

g) $(16x + x^2 + 64) : (x + 8)$ ....

h) $(x^4 - 16) : (2 + x)$ ....

2- Unan con flechas cada número con el o los polinomios de los cuales sea raíz.

$A(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2$	−2
	−1
	0
$B(x) = x^2 - 16$	1
	2
	3
$C(x) = 3x^6 - 3$	4

3- Calculen, en cada caso, el o los valores de m para que la división sea exacta.

a) $(x^2 + 3x - m) : (x + 2)$ ....

b) $(x^2 + mx - 5) : (x + 1)$ ....

c) $(x^2 + x - 6) : (x - m)$ ....

d) $(x^3 - m) : (x - 1)$ ....

4 Realicen las siguientes divisiones enteras de polinomios empleando la regla de Ruffini:

a) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 8) : (x - 4)$

b) $(2x^5 + x^3 + 6x^2 - 2x) : (x - 3)$

c) $(3x^7 - 4x^4 + 5x^3 - x + 9) : (x + 2)$

d) $\left(x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

5 Hallen el resto de las siguientes divisiones enteras:

a) $(5x^4 + 3x^3 - 25) : (x - 2)$

b) $(x^3 + 10x^2 - 2\,000) : (x + 10)$

c) $(x^6 - 2x^3 + 5) : (x - \sqrt[3]{5})$

d) $(x^{19} + 4^{19}) : (x + 4)$

6 Hallen el cociente y el resto en las siguientes divisiones enteras de polinomios:

a) $(2x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 12) : (2x - 3)$

b) $(2x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 12) : (x^3 + x^2 - 1)$

c) $(x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 3) : (x^4 - 1)$

d) $(x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 3) : (x^2 + 3)$

7 Al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$, se obtuvo 10 como resto. Hallen el término independiente de $P(x)$.

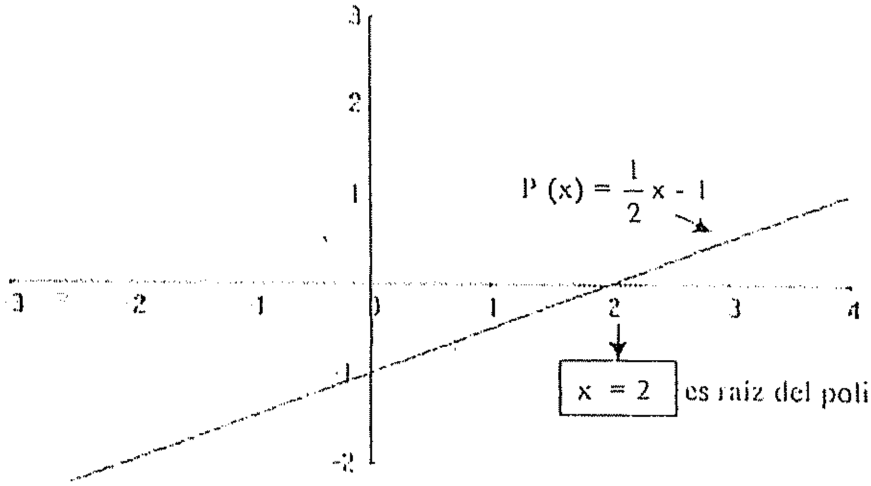
FACTORIZACIÓN DE POLINOMIO

Raíces de un polinomio:

Sabemos que un número real x = a es una raíz real (o un cero) de un polinomio P (x) si P (a) = 0 (son los valores de "x" en los que el polinomio "se hace cero").
Es decir , las raíces son las intersecciones de los gráficos de y = P (x) con el eje horizontal. Se calculan resolviendo la ecuación $\boxed{(P(x) = 0}$

Ejemplos:

1)



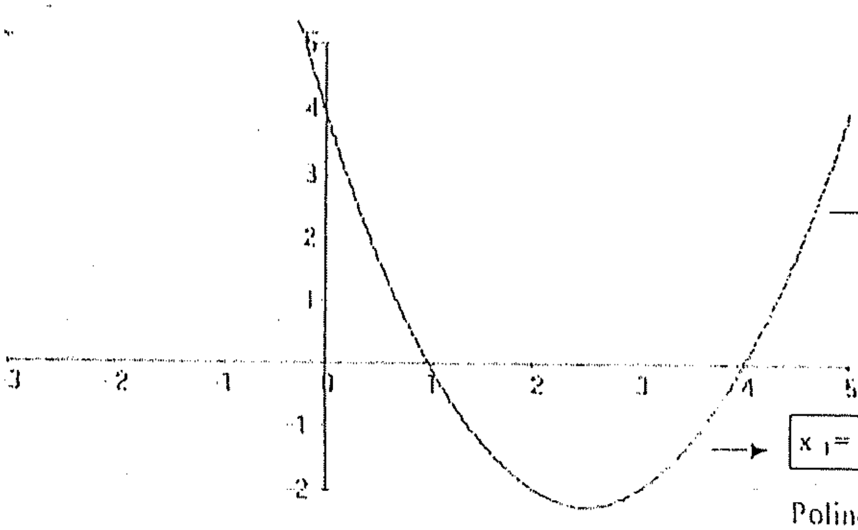
$\boxed{x = 2}$ es raíz del polinomio $P(x) = \frac{1}{2}x - 1$

¿Por qué?

Porque $P_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1$

$\boxed{P_{(2)} = 0}$

2)



$\rightarrow Q(x) = x^2 - 5x + 4$

$\rightarrow$ $\boxed{x_1 = 1}$ y $\boxed{x_2 = 4}$ son raíces del Polinomio $Q(x) = x^2 - 5x + 4$

¿Por qué? ....

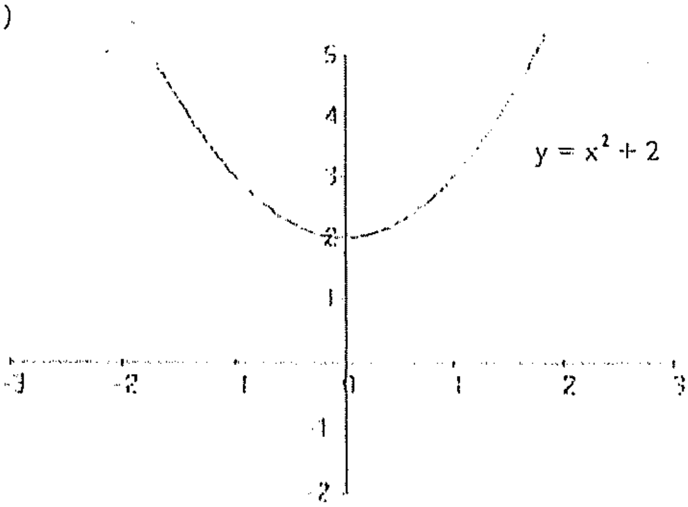
Observación: la intersección de la parábola con el eje de las abscisas (x) es .... y ....

10|17

Ejercicio:

1) ¿Cuáles de los siguientes numeros reales son raíces del $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$
$x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$?

2)



¿El polinomio $y = x^2 + 2$ tiene raíces reales? Justificá tu respuesta

Factorización de polinomios:

¿Qué significa "factorizar" un polinomio?

FACTOR COMÚN:

A veces sucede que en un polinomio P (x) la variable *x* figura en todos los términos. En estos casos, es muy conveniente *extraer factor común*.
Observen cómo extraemos la variable *x* como factor común: *la extraemos elevada a la menor de sus potencias*.
También, en algunos ejemplos, hemos extraído un número que es factor en todos los coeficientes.
Después dividimos cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplos: $E(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3\ (7x^2 + 5x + 1)$

$F(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2\ (\ldots\ldots - 3x + \ldots\ldots)$

$G(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = \ldots\ldots\ (-\ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Siempre podemos controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando la propiedad distributiva.

DIFERENCIA DE CUADRADOS:

Una diferencia de cuadrados puede escribirse como producto, así.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)}$$

Cuando se nos presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par, la pensamos como diferencia de cuadrados

Ejemplos:

$H(x) = x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)\,(x + 5)$

$I(x) = x^4 - 36 = (x^2)^2 - 6^2 = (x^2 - 6)\,(\ldots + \ldots)$

$J(x) = x^2 - 9x^2 = (x^2)^2 - (3x)^2 = (\ldots - \ldots)\,(x^2 + 3x)$

$K(x) = x^6 - 16x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Observen que todo número positivo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada.

Por ejemplo, $6 = \left(\sqrt{6}\right)^2$ Atentos a esto, podemos pensar $(x^2 - 6)$ como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$$

Por otra parte, muchas veces podemos combinar diferencias técnicas para expresar el polinomio como productos de factores del menor grado posible.

Ejemplo 1: $L(x) = 3x^3 - 12x$

Factor común $3x \longrightarrow L(x) = 3x\,.\,(x^2 - 4)$

Diferencia de cuadrados en $(x - 4) \longrightarrow L(x) = 3x\,(\ldots\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots\ldots)$

Ejemplo 2: $M(x) = x^4 - 81$

Diferencia de cuadrados en $(x^4 - 81) \longrightarrow M(x) = [(x^2)^2 - 9^2] = (x^2 - 9)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 9) \longrightarrow M(x) = (\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Ejemplo 3: $N(x) = 6x^6 - 54x^2$

Factor común $6x^2 \longrightarrow N(x) = 6x^2\ (x^4 - 9)$

Diferencia de cuadrados en $(x^4 - 9) \longrightarrow N(x) = 6x^2\ [(x^2)^2 - 3^2] = \ldots\ (x^2 - 3)\,(\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 3) \longrightarrow N(x) = \ldots\ldots\ (\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots)\,(\ldots\ldots)$

EJERCICIOS:

Expresá los siguientes polinomios como producto de polinomios del menor grado posible:

1) $P(x) = 8x^8 - 8y^8$

2) $Q(x) = x^6 - x^2$

3) $R(x) = 3x^7 - 12x^5$

4) $S(x) = 2x^5 - 32x$

5) $T(x) = -x^3 + 16x$

6) $U(x) = 3x^8 - 3x^2$

FACTOR COMUN POR GRUPOS

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor comun en cada uno de esos grupos Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos

Ejemplo 1: $V(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$

Formamos dos grupos $\longrightarrow$ $V(x) = (7x^5 - 5x^4) + (\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* x^4 en el primer grupo
y *factor común* 2 en el segundo grupo $\longrightarrow$ $V(x) = x^4(\ldots\ldots) + 2(\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* $(7x - 5)$ en los dos términos $\longrightarrow$ $V(x) = (7x - 5)(\ldots\ldots)$

Ejemplo 2: $W(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2$

Formamos ...... grupos $\longrightarrow$ $W(x) = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^1 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* ...... en el primer grupo $\longrightarrow$ $W(x) = \ldots\ldots\ldots + (3x^3 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* ...... en los dos términos $\longrightarrow$ $W(x) = \ldots\ldots\ldots$

Puede ocurrir que la *técnica* del factor *común por grupos* esté combinada con algunas de las otras técnicas En el siguiente ejemplo, $Y(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$, observen con atención cómo el *factor común* (-1) del segundo paso da lugar a la aparición del *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos:

Formamos dos grupos $\longrightarrow$ $Y(x) = (x^6 - x^4) + (\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* x^4 en el primer grupo
y *factor común* (-1) en el segundo grupo $\longrightarrow$ $Y(x) = x^4(\ldots\ldots) + (-1)(\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos $\longrightarrow$ $Y(x) = (x^2 - 1)(\ldots\ldots)$

Descomponemos la *diferencia de cuadrados*
que apareció en ambos factores $\longrightarrow$ $Y(x) = (\ldots\ldots)(x+1)(x^2 - 1)(\ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 1) \longrightarrow Y(x) = (x - 1)(x + 1)(\ldots)(\ldots)(x^2 + 1)$

Finalmente $\longrightarrow$ $Y(x) = (\ldots\ldots)^2 \cdot (\ldots\ldots)^2 \cdot (\ldots\ldots)$

Ejercicios:

Expresá los siguientes polinomios como producto de polinomios del menor grado posible

$A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

$C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$

$D(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$

$E(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$

$F(x) = 2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2$

$G(x) = x^8 + x^6 - 64x^2 - 64$

$H(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$

Trinomio cuadrado perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cuadrado. Por ejemplo, desarrollaremos $(x+3)^2$:

Expresamos el cuadrado como producto $\longrightarrow (x+3)^2 = (x+3)\ .\ (\ \ldots\ldots\ \ )$

Aplicamos la propiedad distributiva $\longrightarrow (x+3)\ .\ (x+3) = x^2 + x\ \ldots + \ldots + \ldots$

Agrupamos los términos semejantes $\longrightarrow (x+3)^2 = x^2 + \ldots + \ldots$

Al desarrollar $(x+3)^2$ obtuvimos tres términos:

. en uno aparece el *cuadrado de x*,

. en otro aparece 9, que es el *cuadrado de 3*,

y en otro aparece $6\,x$, que es el *doble del producto entre x y 3*

Si desarrolláramos $(x-3)^2$, obtendríamos una expresión similar cuya única diferencia estaría en el término del *doble del producto*, que aparecería *restando*:

$$(x+3)^2 = x^2 - 6\,x + 9$$

Generalicemos estos resultados para el cuadrado de cualquier binomio.

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2}$

A estas expresiones se las llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo: $F(x) = x^2 - 10x + 25$ es un *trinomio cuadrado perfecto?*

$F(x) = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2\ .\ x\ .\ 5 + 5^2 = (\ \ldots\ldots\ )^2$

Verifiquen que los siguientes polinomios son trinomios cuadrados perfectos y expresen cada uno como un *cuadrado de binomio*.

Ejemplo: ¿$F(x) = x^2 - 10\,x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto?

$$\underbrace{x^2}_{(x)^2} - \underbrace{10\,x}_{=2\ .\ x\ .\ (-5)} + \underbrace{25}_{(-5)^2}$$

$\therefore F(x) = (x-5)^2$

Ejercicios

Expresá los siguientes trinomios, si es posible, como cuadrados de binomios.

$G(x) = x^2 + 8\,x + 16 = x^2 + 2\ .\ x\ \ldots\ldots + \ldots\ldots^2 = (x + \ldots\ldots)^2$

$H(x) = 16\,x^2 - 128\,x + 256 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

$I(x) = x^2 - x + 0{,}25 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

$J(x) = 9\,x^4 + 36\,x^2 + 36 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ )^2$

$K(x) = x^6 + x^4 + 0{,}25\,x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$L(x) = 4\,x^2 + 4\,x + 1$

$M(x) = x^2 - \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{1}{9}$

$N(x) = x^2 + x + 1$

$O(x) = 25\,x^6 + 20\,x^3 + 4$

Cuatrinomio cubo perfecto

Analicemos el resultado de elevar un binomio al cubo. Por ej. desarrollemos $(a + b)^3$

Expresamos el cubo como producto $\quad (x + 2)^3 = \underbrace{(x + 2)^2}_{(1)} \cdot (\quad\quad)$

Sabemos que $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

Reemplazamos la expresión anterior en (1) y resulta:

$(x + 2)^3 = (x^2 + 4x + 4)\ (x + 2)$

Aplicamos propiedad distributiva $\longrightarrow \quad (x + 2)^3 = x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$

Agrupamos los términos semejantes $\longrightarrow \quad \boxed{(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

Al desarrollar $(x + 2)^3$ obtuvimos 4 términos:

- en uno aparece el cubo de x $(x)^3$
- en otro aparece el cubo de 2 (8)
- en otro aparece $6x^2$ que es el triplo del producto entre x^2 y 2
- en otro aparece $12x^2$ que es el triplo del producto entre x y 2^2

Es decir $(x + 2)^3 = \underset{(x)^3}{x^3} + \underset{3\,x^2\,2}{\underline{6x^2}} + \underset{3\,x\,2^2}{\underline{12x}} + \underset{2^3}{8}$

generalicemos el resultado para cualquier binomio:

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$$

A estas expresiones se las llama cuatrinomio cubo perfecto

Ejemplo:

$$¿F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}a + \frac{3}{2}a^2 + a^3 \quad \text{es un cuatrinomio cubo perfecto?}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \underbrace{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 a} \quad \underbrace{3\,\frac{1}{2}\,(a)^2} \quad (a)^3$$

Sí, podemos escribir entonces: $F(x) = \left(\frac{1}{2} + a\right)^3$

Ejercicios:

Expresá los siguientes trinomios, si es posible, como cubos de binomios:

1) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$

2) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 =$

3) $27y^3 + 27y^2 x + 9yx^2 + x^3 =$

4) $1 - x^6 - 3x^2 + 3x^4 =$

5) $\frac{8}{27} b^3 - 2 b^2 + \frac{9}{2} b - \frac{27}{8} =$

6) $-1 + 0{,}6\, a^2 + 0{,}008\, a^6 - 0{,}12\, a^4 =$

7) $\frac{1}{27} x^6 + 1 + x^2 + \frac{1}{3} x^4 =$

Factoricemos los siguientes polinomios teniendo en cuenta sus raíces:

a) $2x^2 + x - 1$: ⟶ ¿se puede factorizar?
Busquemos las raíces de este polinomio. Para ello, escribimos los divisores del término independiente -1:

$|-1| = \pm 1$

Encontremos la especialización del polinomio $2x^2 + x - 1$ en cada uno de esos divisores, hasta encontrar un valor que sea raíz:

$+1: \longrightarrow 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 =$

$= 2 + 0 = \boxed{2} \longrightarrow +1$ no es raíz

Probemos con (-1):

$-1 \longrightarrow 2\ (-1)^2 + (-1) - 1 =$

$= 2 - 1 - 1 =$

$= 2 - 2 = \boxed{0} \longrightarrow$ $\boxed{-1 \text{ es raíz}}$

$2x^2 + x - 1$ es divisible por $(x + 1)$

Resolvamos la división por Ruffini:

	2	1	-1
-1		-2	1
	2	-1	$\boxed{0}$

$\Rightarrow \boxed{2x^2 + x - 1 = (2x - 1)\ (x + 1)}$

polinomio desarrollado   polinomio factorizado

b) $\boxed{2x^2 + 2x - 4 = 2\,(x^2 + x - 2)} \longrightarrow$ factor común (1)

¿$x^2 + x - 2$ se puede factorizar?

Busquemos las raíces de este polinomio. Para ello, escribimos los divisores del término independiente -2.

Encontremos la especialización del polinomio $(x^2 + x - 2)$ en cada uno de esos divisores; hasta encontrar un valor que sea raíz.

$(+1)^2 + (+1) - 2 =$

16|17

$= 1 + 1 - 2 = 0 \implies \boxed{+1} \longrightarrow$ es raíz de $(x^2 + x - 2)$

$(x^2 + x - 2)$ es divisible por $(x - 1)$

Resolvemos la división por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \implies \boxed{(x^2 + x - 2) = (x - 1)\,.\,(x + 2)} \qquad (2)$$

De (1) y (2) podemos escribir $\boxed{2x^2 + 2x - 4 = 2\ (x - 1)\,.\,(x + 2)}$

polinomio desarrollado　　　　polinomio factorizado

<u>Ejercicios:</u>

Factorizar (teniendo en cuenta las raíces) los siguientes polinomios:

1) $x^3 + x^2 - x - 1 =$

2) $a^3 + 2a^2 - a - 2 =$

3) $m^3 + 4m^2 + m - 6 =$

4) $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 =$

5) $2a^4 + 4a^3 - 4a - 2 =$