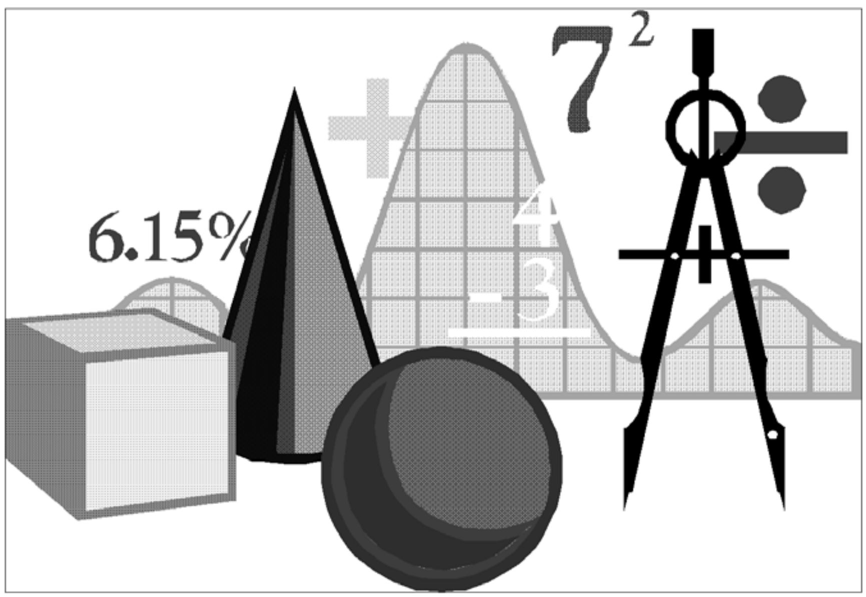
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO

"LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN"

MATEMÁTICA

2° Año



Razones y Proporciones

2014

RAZONES Y PROPORCIONES

Las cantidades indicadas en la receta sirven para preparar 4 tazas de chocolate.
Si en lugar de 4 tazas quisiéramos preparar el doble, deberíamos duplicar todas las cantidades; mientras que para preparar la mitad, tendríamos que dividir por 2 todas las cantidades.

Receta para preparar
4 tazas de chocolate
Ingredientes:
- *150 g de chocolate amargo.*
- *100 g de chocolate con leche*
- *1 litro de leche.*
- *1 cucharada de maizena*

Hagamos una tabla con las cantidades de chocolate amargo que necesitamos en función de la cantidad de tazas que queremos preparar.

Cantidad de tazas	4	8	12	16	20	2
Cantidad de Chocolate amargo (en g)	150	300	450	600	750	75

Observen que, en todos los casos, la razón entre la cantidad de chocolate y la cantidad de tazas siempre es la misma:

$\frac{150}{4} = 37{,}5$; $\frac{300}{8} = 37{,}5$; $\frac{450}{12} = 37{,}5$, $\frac{75}{2} = 37{,}5$; etc.

> La **razón** entre dos cantidades **a** y **b** ($b \neq 0$) es el cociente entre esas cantidades

Observen que $\frac{150}{4} = \frac{300}{8}$, es decir, la **razón** entre 150 y 4 es igual a la **razón** entre 300 y 8.
Los números 150, 4, 300 y 8, en ese orden, forman una **proporción.**

> Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción.

a y **d** son los **extremos** de la proporción.

b y **c** son los **medios** de la proporción.

Esta proporción se lee: "**a** es a **b** como **c** es a **d**".

- En la proporción $\frac{150}{4} = \frac{300}{8}$ se verifica que $150 . 8 = 300 . 4$
- En la proporción $\frac{450}{12} = \frac{75}{2}$ se verifica que $450 . 2 = 75 . 12$

Esta propiedad se cumple en **todas** las proporciones.

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces: **a . d = b . c** ⟵ **Propiedad fundamental.**

1- Completen cada proporción:

a. $\frac{\quad}{5} = \frac{3}{15}$ b. $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{12}$ c. $\frac{7}{4} = \frac{3,5}{\quad}$ d. $\frac{4,5}{5} = \frac{\quad}{10}$ e. $\frac{6,3}{\quad} = \frac{0,7}{10}$

Volvamos a la receta:
¿Cuánto chocolate amargo necesitaremos si sólo queremos preparar media taza?

Cantidad de tazas	Cantidad de chocolate (g)
4	150
$\frac{1}{2}$	x

Planteamos la proporción: $\frac{150}{4} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$

Aplicamos la propiedad fundamental: $150 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot x$

Entonces, $x = \frac{150 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 18,75$

Necesitamos 18,75 g para preparar media taza.

2- Hallen el valor de x.

a. $\frac{x}{25} = \frac{2,4}{0,48}$ b. $\frac{3 \cdot (x-1)}{2} = \frac{5 \cdot (x+4)}{13,\widehat{3}}$ c. $\frac{27}{x} = \frac{x}{2 - 1,\widehat{6}}$

3- Nos informan que 2 de cada 3 alumnos de un curso aprobaron Matemática. Si en total son 36 alumnos,
¿cuántos aprobaron?

4- Indiquen si para los valores de **m, n, p y q** dados se forma la proporción $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

a. $m = 5;\ n = 10;\ p = 34;\ q = 17$

b. $m = 0,4;\ n = 5;\ p = 6;\ q = 75$

c. $m = 2,4;\ n = 12;\ p = 3,5;\ q = 17,5$

d. $m = 1;\ n = 2;\ p = 2;\ q = 1$

5- Hallen el valor de x.

a. $\frac{3x + 7}{3} = \frac{x}{-6}$

b. $\frac{x + 1,3}{\frac{3}{7}\left(2x + \frac{5}{3}\right)} = \frac{4,\widehat{6}}{\frac{1}{3} - 2^0 + \sqrt{\frac{49}{9}}}$

b. $\dfrac{-2}{x+8} = \dfrac{0.5}{2x + \dfrac{19}{4}}$

i. $\dfrac{2x + \dfrac{4}{3}}{0.\hat{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}}{\left(3^{18}\right)^2 : 3^{37}}$

c. $\dfrac{-3x + \dfrac{4}{5}}{0,75} = \dfrac{-5x + 3}{15\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}$

j. $\dfrac{3x - 1}{x + 2} = \dfrac{\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{5}{12} + 0,08\hat{3}\right)^2}{0.2\hat{6}}$

d. $\dfrac{2x + 4,\hat{3}}{\dfrac{7}{2} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{x + 1,8\hat{3}}{2,5}$

k. $\dfrac{1,\hat{8}\hat{1} - (368)^0}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{\left(2^3\right)^2 + 57}}$

e. $\dfrac{3x + 2}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{x + \dfrac{11}{8}}$

l. $\dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{7}{16}}}{-\dfrac{3}{4}\left(x + 2.\hat{6}\right)} = \dfrac{2^{35} : 2^{37}}{-1,\hat{6}}$

f. $\dfrac{0,1\hat{6} + \dfrac{7}{30}}{x} = \dfrac{x}{1,\hat{1}}$

ll. $\dfrac{\left(1 - 0,\hat{3}\right)^{-1} - 1,3}{x} = \dfrac{\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{32} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}\right]^{-1}}{6(x+1) + 28^0}$

m. $\dfrac{0,\hat{4} \cdot 0,3}{1,\hat{2} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{6}{7}\sqrt[3]{\dfrac{0,0\hat{1} \cdot 0,0\hat{3}}{10}}}{x}$

Resuelve:

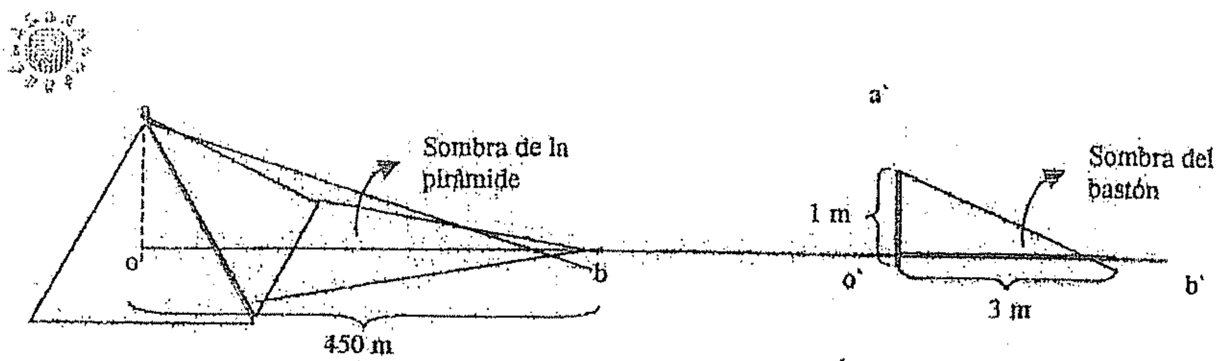
1) Los promedios de vida de la tortuga y del elefante. cuya suma es 100 años, guardan entre sí la relación $\frac{2}{3}$. Calcula dichos promedios de vida.

2) Las alturas aproximadas del Everest y del Aconcágua, cuya diferencia es 2.000 m, guardan entre sí la relación $\frac{9}{7}$ dichas alturas.

3) El número de goles a favor de la Argentina en el campeonato mundial de fútbol de 1986 es al número de goles en contra como 3,5 es a 1.25. Sabemos que la diferencia entre ambos números es 9. Calcula el número de goles en contra de la Argentina.

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

¿Puedes calcular la altura de la pirámide?



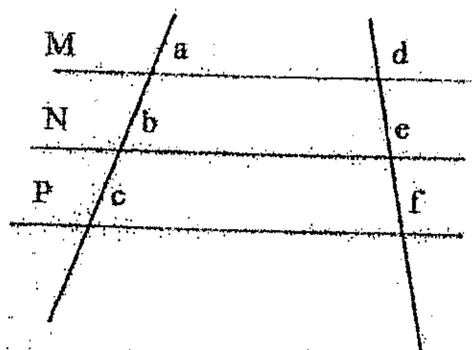
En realidad la historia cuenta que fue el matemático griego Thales quien calculó por medio de este procedimiento la altura de la pirámide de Keops (640 a 550 a C.)

Teorema de Thales
Si varias rectas paralelas son cortadas por dos transversales, dos segmentos cualesquiera una de ellas y sus correspondientes en la otra forman una proporción.
M//N//P

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}}$$

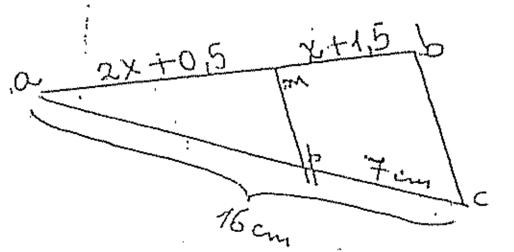
$$\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{df}}{\overline{de}}$$

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{df}}{\overline{ef}}$$

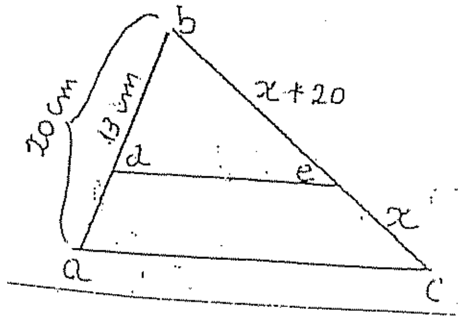


Ejercicios

1) Calcula la medida de $\overline{am}$ y $\overline{bm}$ sabiendo que $\overline{mp} \parallel \overline{bc}$

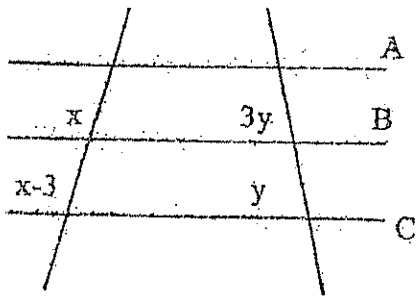


2) En la figura siguiente $\overline{de} \parallel \overline{ac}$.
Calcula la medida de $\overline{ad}$, $\overline{ce}$ y $\overline{be}$.

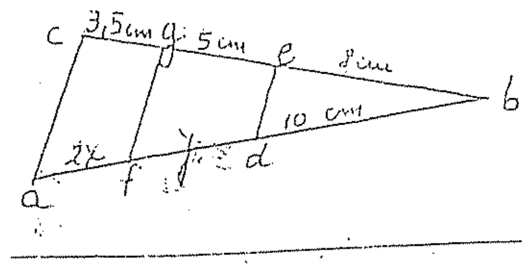


3) Calcula en cada figura el valor de x y el valor de y.

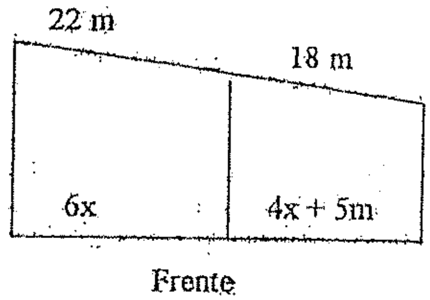
A) A // B // C



B) $\overline{ac} \,//\, \overline{de} \,//\, \overline{fg}$



4) La figura muestra dos lotes contiguos. Sus paredes laterales son paralelas. Teniendo en cuenta la información de la figura, calcula la longitud del frente.

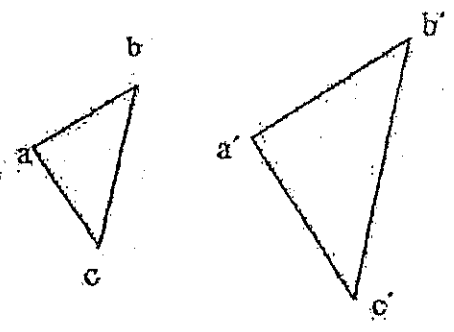


Triángulos semejantes:

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

En símbolos:

$$\overset{\Delta}{abc} \sim \overset{\Delta}{a'b'c'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a} = \hat{a}' \,;\, \hat{b} = \hat{b}' \,;\, \hat{c} = \hat{c}' \\ \dfrac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{c'a'}} \end{cases}$$



Criterios de semejanza de triángulos

Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar todas las condiciones analizadas anteriormente. Los criterios de semejanza son conjuntos de condiciones mínimas tales que, si se cumplen, aseguran que los triángulos son semejantes.

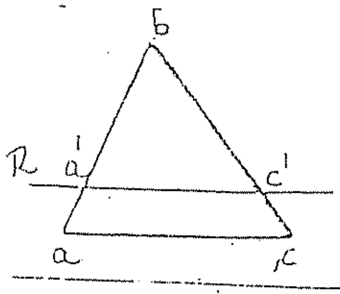
Algunos de los criterios de semejanza de triángulos son:

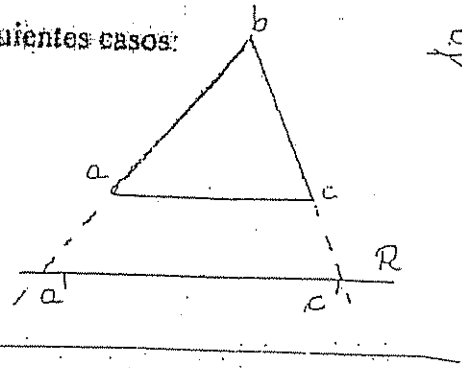
Dos triángulos son semejantes si tienen:
* dos ángulos iguales;
* tres lados proporcionales;
* dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

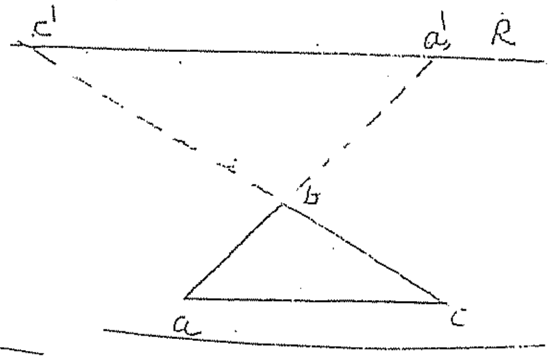
Propiedad

Si se traza una paralela a un lado de un triángulo, ésta determina, con las rectas que incluyen a los otros dos, un triángulo semejante al dado.

Se pueden presentar los siguientes casos:



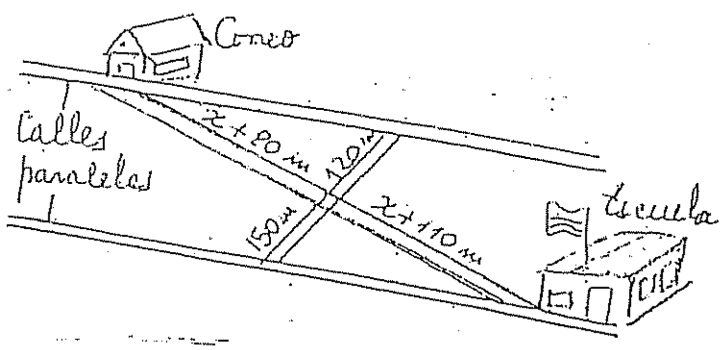




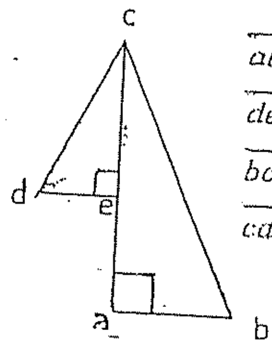
En cada caso el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ es semejante al nuevo triángulo $\overset{\Delta}{a'bc'}$

Ejercicios y problemas

1) ¿A qué distancia se encuentran entre sí el correo y la escuela?



2) Demostrar que los triángulos son semejantes.



$\overline{ab} = 28cm$

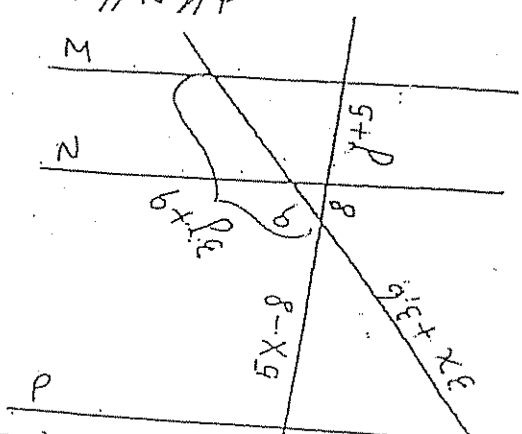
$\overline{de} = 16cm$

$\overline{bc} = 35cm$

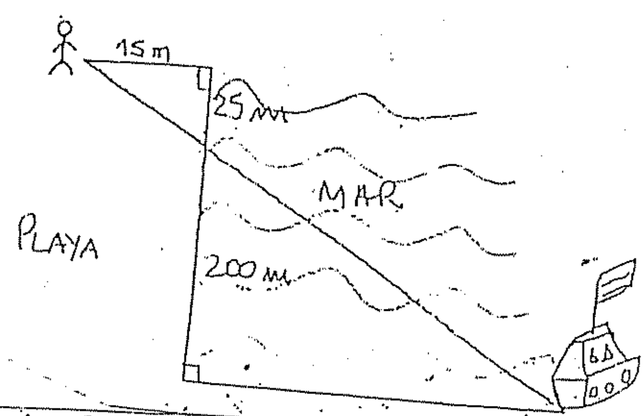
$\overline{cd} = 20cm$

3) Calcula la medida de x y de y

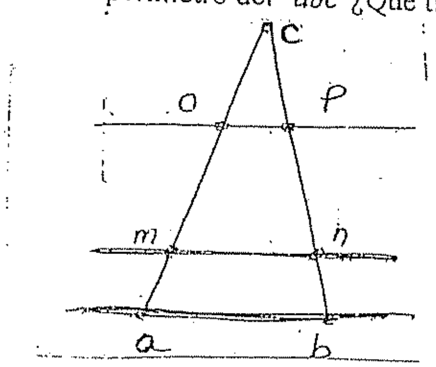
M // N // P



4) Un observador situado en la playa ve un barco anclado fuera de la costa. ¿A qué distancia está el barco de la costa?



5) Hallar el perímetro del abc ¿Qué tipo de triángulo es?



Datos:

$\overline{ab} \,//\, \overline{op} \,//\, \overline{mn}$

$\overline{co} = \overline{op} = 20\ cm$

$\overline{om} = 30\ cm$

$\overline{pn} = 36\ cm$

$\overline{nb} = 12\ cm$

La razón entre el cateto opuesto a un ángulo $\hat{\alpha}$ de un triángulo rectángulo y la hipotenusa se llama seno de $\hat{\alpha}$ y es un valor constante que no depende de los lados del triángulo, sino de la amplitud de $\hat{\alpha}$.

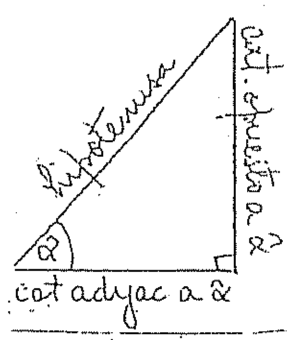
Con estas mismas características, se puede calcular la razón entre el cateto adyacente a $\hat{\alpha}$ y la hipotenusa, que recibe el nombre de coseno de $\hat{\alpha}$.

La razón entre el cateto opuesto y el adyacente, es la tangente de $\hat{\alpha}$.

$$sen\ \hat{\alpha} = \frac{cat.\ op.\ \hat{\alpha}}{hipot.}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{cat.\ ady.\ \hat{\alpha}}{hipot.}$$

$$tg\ \hat{\alpha} = \frac{cat.\ op.\ \hat{\alpha}}{cat.\ ady.\ \hat{\alpha}}$$

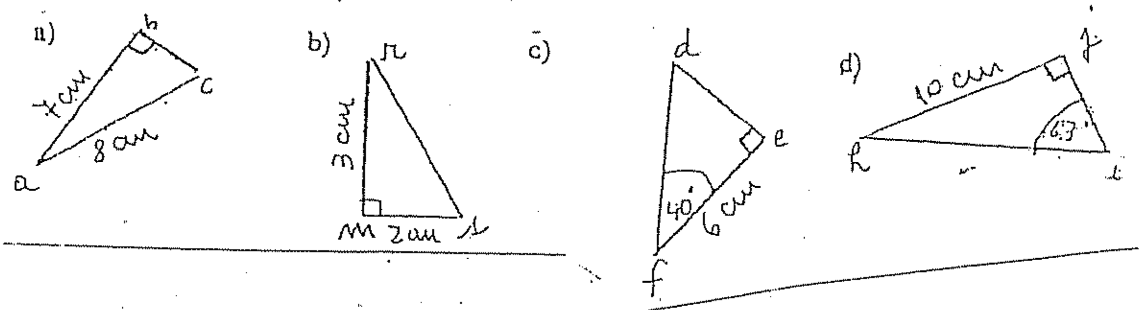


Ejercicios y problemas

1) Construye un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30° y realiza las mediciones necesarias para calcular en forma aproximada el sen 30°; cos 30° y tg 30°.

2) Utilizando la calculadora completa la línea de puntos en cada caso.
   a) sen 28° = ...
   b) cos 54° 6′ = ...
   c) tg 45° = ...
   d) sen a = 0,707; a = ...
   e) cos b = 1; b = ...

3) Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

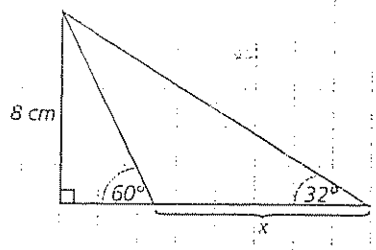


4) En un triángulo isósceles de 21 cm de perímetro, el lado no congruente mide 5 cm. Calcula el área del triángulo y la amplitud de sus ángulos interiores.

5) Para sostener un poste de 22 m de altura, se utiliza un cable de acero fijado desde el extremo superior del poste al piso. Calcula la longitud del cable si forma con el piso un ángulo de 70°.

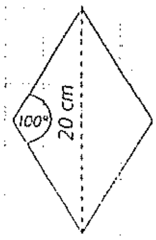
6) Con un teodolito ubicado a 32 m del pie de una torre se observa el extremo superior de la torre bajo un ángulo cuya amplitud es de 61°. Calcula la altura de la torre.

7)



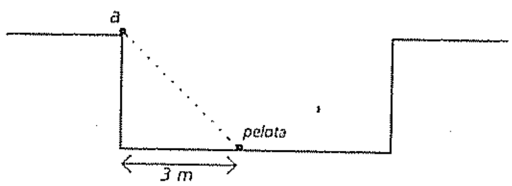
x =

8) *abcd* rombo



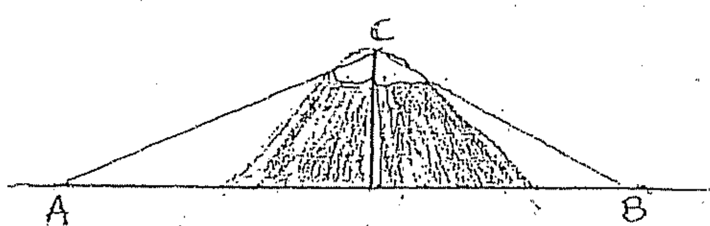
Perímetro =

9) A Matías se le cayó la pelota en el fondo de una pileta vacía En el diagrama pueden observar la ubicación de Matías (punto a) y de la pelota. Si la observa con un ángulo de depresión de 40°, ¿cuál es la profundidad de la pileta?

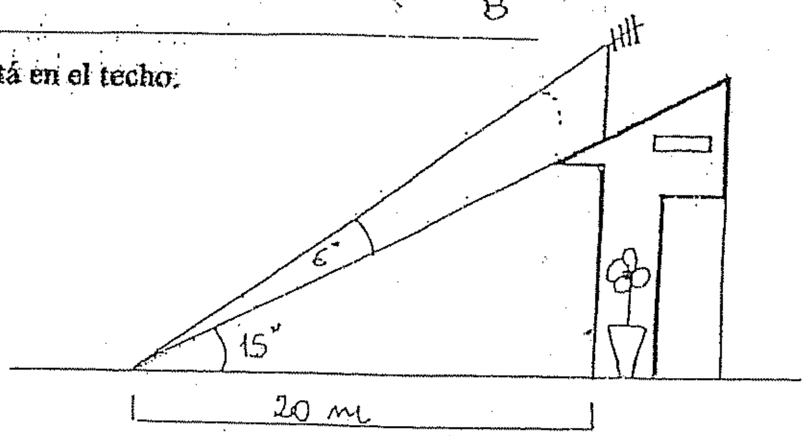


10) Martín se encuentra a una cuadra del obelisco y puede observar su extremo superior bajo un ángulo de elevación de 33° 5´. Si Martín mide 1,85 m, ¿cuál es la altura del obelisco?

11) **Una montaña de 650 m de altura separa dos pueblos A y B. Desde A se ve la cima C de la montaña con un ángulo de elevación de 24°; desde B el ángulo de elevación es de 36°, ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos?**



12) **Calcula la altura de la antena que está en el techo.**



13) **Calcular la apotema de un pentágono de 12 cm de lado (recordar que los ángulos centrales del pentágono son 72° y que la apotema es el segmento que va desde el centro hasta la mitad del lado, cortando al mismo perpendicularmente)**