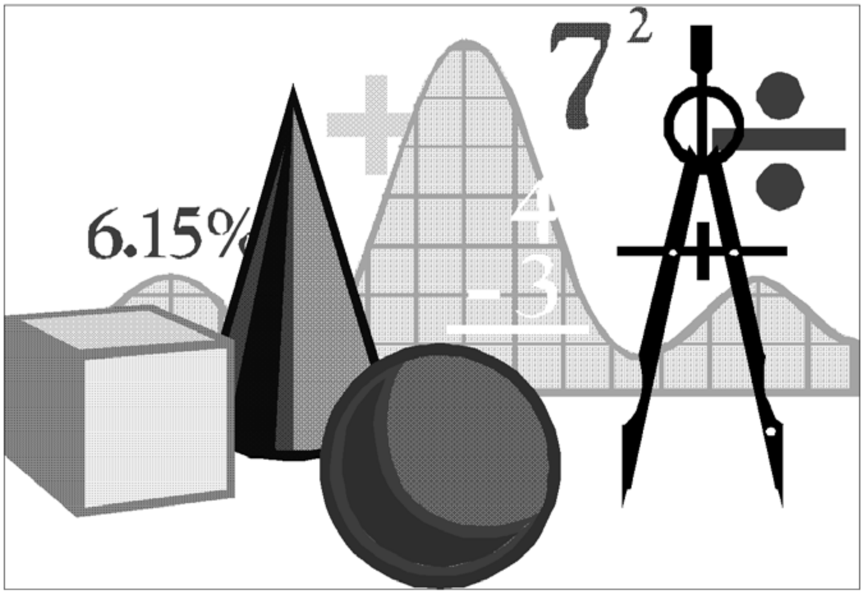
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO
“LIBERTARDOR GENERAL SAN MARTÍN”

MATEMÁTICA

3° Año



Funciones

2014

Comenzamos resolviendo un problema

Se quiere crear un servicio minitel (servicio de información electrónico) y se propone a los futuros cliente, elegir entre tres formas de pago mensual:

Tarifa A: Pago de la suma total de $380.
Tarifa B: Pago de $147 más $0,20 por minuto de conexión.
Tarifa C: El precio del minuto de conexión es de $0.45

Encuentra en cada caso una fórmula que relaciones el precio a pagar con los minutos de uso por mes y analiza cuál es la tarifa más conveniente para el consumidor según el tiempo de comunicación (mensual). Realiza un gráfico de guía.

En este problema se relacionan dos variables, ¿cuáles son?

FUNCIÓN *es la relación que a cada elemento de un primer conjunto le hace corresponder un único elemento de un segundo conjunto.*

Es importante destacar:

- la definición de una función supone la existencia de dos conjuntos y una ley que los vincule.
- a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.
- a elementos distintos del primer conjunto le puede corresponder el mismo elemento en el segundo.
- no existen elementos del primer conjunto que no posean un elemento correspondiente en el segundo conjunto.

Las funciones que en matemática revisten mayor interés son aquellas que son subconjuntos de **RxR** o sea aquellas que a números reales le corresponden números reales. Éstas funciones las denominamos funciones reales de variable real.

Teniendo en cuenta nuevamente el problema del comienzo, las fórmulas obtenidas pueden aplicarse a cualquier valor real x de la variable independiente (v.i.), pero si pensamos las expresiones en el contexto planteado, resulta que x solo tendrá validez si $x \in R^+_0$.

Surge entonces la definición:

Dominio de una función es el conjunto formado por todos los posibles valores que puede asumir la variable independiente.

El dominio de una función lo indicamos con la expresión Dom( ), colocando dentro del paréntesis el nombre de la ley que define la correspondencia.

Si $f(x) = \sqrt{x-4}$, resulta

$\text{Dom}(f) = [4; +\infty)$ ya que $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Es necesario destacar que en el conjunto $[8; +\infty)$, la función también está definido, pero convenimos en usar la expresión Dom ( ) para referirnos al máximo conjunto de valores que puede asumir la v.i., para que la ley tenga sentido.

Para cada valor de la v.i. surge un valor de imagen respectivo por lo que:

Al conjunto de las imágenes por la aplicación de la ley, lo Denominaremos **rango o recorrido o conjunto imagen de la función**

Lo simbolizaremos I_m ( )

2) Averigua el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 3$

b) $g(x) = x^2$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $t(x) = +\sqrt{x-2}$

e) $f(x) = +\sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}}$

f) $g(x) = \sqrt[3]{(x-2)(x-1)}$

g) $h(x) = +\sqrt{1+x^2}$

h) $m(x) = (x - 1)$

i) $f(x) = 3x + 1$

j) $r(x) = +\sqrt{x-1}$

k) $h(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

3) Dadas las siguientes funciones reales, determinar el dominio de definición de cada una, los ceros y calcular, si es posible la imagen de 5, la de −2 y la de $\frac{1}{3}$

a) $f(x) = +\sqrt{(x+1)(-3)}$

b) $g(x) = +\sqrt{1-x}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} - 2$

d) $p(x) = +\sqrt{x^2(x-3)}$

e) $t(x) = +\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

f) $n(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x-2}}$

4) Siendo:

a) $f(x) = x - 2$ determinar $a \,/\, f(a) = -\frac{1}{2}$

b) $g(x) = (x-2)^3$ determinar $b \,/\, g(b) = 0$

c) $h(x) = +\sqrt{1+x^2}$ determinar $c \,/\, h(c) = 3$

Cero o raiz de una función es el valor de la variable para el cual la imagen asume el valor cero.

En la gráfica son los puntos de intersección con el eje de las abcisas (x)

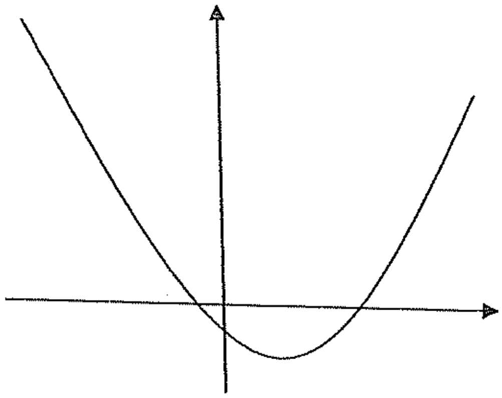
5) Grafica en el ordenador las funciones $f(x)= x^2 - 4$ y $g(x)= x^2 + 4$.

Determina gráfica y analíticamente los ceros de ambas funciones.

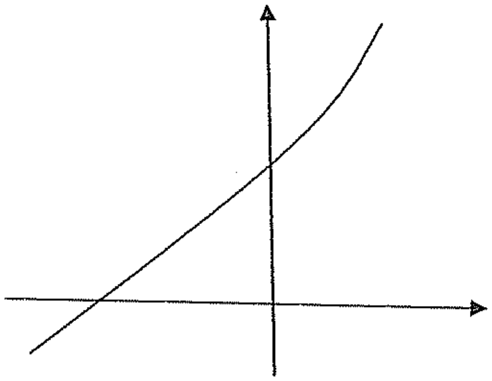
Clasificación de funciones:

Función inyectiva: Una función f definida de A en B es inyectiva si y sólo si todo par de elementos distintos del conjunto A tienen imágenes distintas del conjunto B.

Una función f de A en B es inyectiva $\leftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



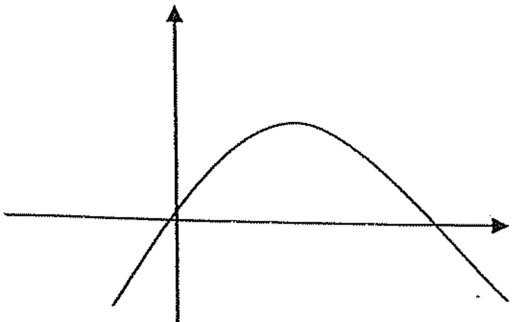
Gráfica de una función no inyectiva



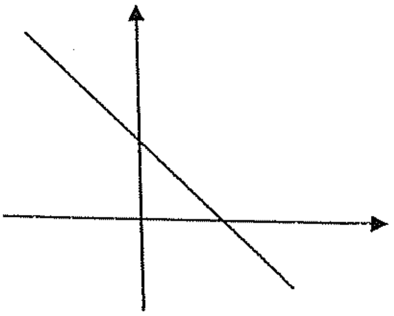
Gráfica de una función inyectiva

Función suryectiva: Una función f definida de A en B es suryectiva si y sólo si todos los elementos del conjunto B tienen, por lo menos una preimagen en A.

Una función f de A en B es suryectiva $\leftrightarrow \forall y \in B\ \ \exists x \in A / y = f(x)$



Función no suryectiva



Función suryectiva

Función biyectiva: Una función f definida de A en B es biyectiva si y sólo si es inyectiva y suryectiva.

6) Considera las siguientes funciones definidas de A en B=R :

$f(x)= \frac{1}{2} x^3$; $g(x)=2x+3$; $h(x)= 2\,|x-1|$; $m(x)= 9-x^2$; $r(x)= +\sqrt{x}$; $j(x)= \frac{4}{x}$

$k(x)= x^4-1$; $n(x) = 2^x$

Realiza cada gráfico y analiza biyectividad.

FUNCIÓN PAR

$$\boxed{f(x) \text{ es par } \Leftrightarrow f(x) = f(-x)}$$

Ejemplo:

$$\begin{gathered} f(x) = x^2 \\ f(x) = f(-x) \\ x^2 = (-x)^2 \\ x^2 = (-x^2) \\ x^2 = x^2 \end{gathered}$$

es par

es simétrico respecto del eje de las ordenadas.

$$\begin{gathered} g(x) = x + 3 \\ g(x) \neq g(-x) \\ x + 3 \neq - x + 3 \end{gathered}$$

no es par

FUNCIÓN IMPAR

$$\boxed{f(x) \text{ es impar } \Leftrightarrow f(x) = - f(-x)}$$

Ejemplo:

$$\begin{gathered} f(x) = x^3 \\ f(x) = - f(-x) \\ x^3 = - (-x)^3 \\ x^3 = - (-x)^3 \\ x^3 = x^3 \end{gathered}$$

es impar

es simétrica respecto del origen de coordenadas

$$\begin{gathered} g(x) = x^2 + 3 \\ g(x) \neq - g(-x) \\ x^2 + 3 \neq - [(-x)^2 + 3] \\ x^2 + 3 \neq - (x^2 + 3) \\ x^2 + 3 \neq - x^2 - 3 \end{gathered}$$

no es impar

7) Analiza la paridad de las funciones de la actividad anterior.

Intervalos de positividad y negatividad

Los intervalos de positividad (negatividad) están formados por los elementos del dominio para los cuales la función asume valores positivos (negativos).

8) Analiza positividad y negatividad de las funciones graficadas anteriormente.

Funciones crecientes y decrecientes

Una función es creciente en un intervalo si al aumentar la variable independiente, aumenta también la variable dependiente.

Dado $f: A \longrightarrow B$ decimos que es creciente $\Leftrightarrow \forall\ x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Una función es decreciente en un intervalo si, al aumentar la variable independiente, disminuye la variable dependiente.

Dado $f: A \longrightarrow B$ decimos que es decreciente $\Leftrightarrow \forall\ x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

9) Analiza el crecimiento de las funciones ya graficadas

Función inversa

Dada una función $f: A \longrightarrow B$ si f es biyectiva entonces existe $g: B \longrightarrow A$ llamada función inversa de f y lo simbolizamos f^{-1}

Para encontrar la ley de dicha función despejamos x de la función f (que ahora es la imagen de la nueva función).

Ejemplo: $f: R \longrightarrow R \ /\ f(x) = 4X - 3$ admite inversa por ser biyectiva.

$$y = 4x - 3 \Rightarrow y + 3 = 4x \Rightarrow \frac{y+3}{4} = x \qquad ①$$

realizamos el cambio de variable ya que x es ahora y viceversa de ①

$$\frac{x+3}{4} = y^{-1} \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad \frac{x+3}{4} = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

10) Resuelve los siguientes problemas

A) Se lanza hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 95 m/s. La altura a la que se encuentra la pelota (medida en metros) desde el suelo en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por la fórmula:

$E(t) = -5t^2 + 95t$

- i) ¿De qué tipo de función se trata?
- ii) Grafica la situación en un par de ejes cartesianos.
- iii) Observando la gráfica intenta responder, ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? y ¿cuál es la altura máxima alcanzada?

B) En el zoológico nacieron dos crías de distintas especies. Ambos cachorros pesaban lo mismo al nacer. Al cabo del primer mes, uno de ellos había aumentado 4 kg y el otro, aumentó el 20% de su peso. Sin embargo, ambos seguían pesando igual. Durante los tres meses siguientes, el animal 1 siguió aumentando 4 kg por mes y el animal 2 mantuvo un crecimiento mensual del 20% de su peso.

i) Completa la tabla y realiza el gráfico correspondiente.

Tiempo (meses)	0	1	2	3	4
Peso cría 1 (kg)					
Peso cría 2 (kg)					

ii) Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre el tiempo transcurrido y el peso de la cría 1. ¿De qué tipo de función se trata?

C)En tu netbook busca: Mi escritorio ⟶ Navegar mis recursos ⟶ Secundaria ⟶ Matemática ⟶ Aplicaciones de la función cuadr ⟶ abrir y resuelve la actividad 1

ALGUNAS FUNCIONES PARTICULARES

La gráfica de una función se obtiene en general, a partir de la confección de una tabla de valores. La misma permite ubicar puntos que luego se unen do de intuyendo la forma que puede tener la gráfica.

Grafica las siguientes funciones:

$f_1: R \to R \ / \ f(x) = k \quad k \quad R$ función constante

$f_2: R \to R/ \ f(x) = x$ función identidad

$f_3: R \to R \ / \ f(x) = x^2$ función cuadrática

$f_4: R \to R \ / \ f(x) = x^3$ función cúbica

(función cuadrática y función cúbica: funciones polinómicas)

$f_5: R \to R \ / \ f(x) = |x|$ función valor absoluto

$f_6: R - \{ 0 \} \to R \ / \ f(x) = 1/x$ función racional

Gráfico de una función a partir de otro dado

I) Conociendo la gráfica de f, hallar a partir de ello la de g siendo,

$$g(x) = f(x) + k, \qquad k \in R \wedge k \neq 0$$

Ejemplo: $f(x) = x^2$ $g_1(x) = x^2 + 1$ $g_2(x) = x^2 - 2$

CONCLUSIÓN

La gráfica de $g(x) = f(x) + k$ se obtiene trasladando k unidades en la dirección del eje y, la gráfica de $f(x)$
Si k es positivo la traslación es hacia arriba, si k es negativo la traslación es hacia abajo.

II) Conocida la gráfica de f, hallar a partir de ella la de g sabiendo que

$$g(x) = f(x + h) \quad \forall \; h \in R \wedge h \neq 0$$

Ejemplo: $f(x) = x^3$ $\qquad g_1(x) = (x + 1)^3$ $\qquad g_{(2)} = (x - 2)^3$

CONCLUSIÓN

III) Conocida la gráfica de f, hallar a partir de ella la de g sabiendo que:

$$g(x) = c \,.\, f(x)$$

a) si $c > 1$
$f(x) = |x|$ $\qquad g(x) = 2 \,.\, |x|$

b) si $0 < c < 1$ $\qquad f(x) = |x|$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2}\,|x|$

c) si $c = -1$ $\qquad f(x) = |x|$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2}\,|x|$

d) si $c < 0$
$g(x) = -2\,|x| = (-1) \,.\, 2\,|x|$

11) Representa las siguientes funciones por corrimiento:

a) $g(x) = -|x|$
b) $p(x) = |x + 2|$
~~c) m (x) = | 2 x − 5 | − 1~~
d) $f(x) = -x^2 + 1$
e) $t(x) = (x - 2)^2$
f) $o(x) = (x + 2)^2 + 1$
g) $q(x) = x^3 - 1$
h) $r(x) = (x + 1)^3 - 2$
i) $b(x) = -(x - 2)^3 + \frac{1}{2}$
j) $1(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \neq 0$
k) $s(x) = \frac{1}{x - 1} \qquad \forall\, x \neq 1$
l) $h(x) = \frac{1}{x} + 2 \qquad \forall\, x \neq 0$

12) En tu netbook busca: Mi escritorio → Navegar mis recursos → Secundaria → Matemática → Análisis de funciones racionales → abrir, y resuelve la actividad de cierre.

13) Representa las siguientes funciones por tramos. Realiza el estudio completo.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 5 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [-2,0[\\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $p(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 1 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 2 \\ -x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

h) $m(x) \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 1 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

i) $g(x) \begin{cases} x^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \\ x - 5 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

j) $h(x) \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 - 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

k) $r(x) \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 6 + 2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

14) Problemas

A) Una empresa de servicios eléctricos factura los consumos domiciliarios según la siguiente tarifa:

Cargo fijo sobre derecho a consumo	$ 23
Los primeros 120kw	$ 0,20 c/u
Los restantes kw	$ 0,30 c/u

a) Halla la expresión que indique el importe a pagar en función del consumo
b) ¿Cuánto pagará una familia que consumió 110 kw? ¿y otra que consumió 220?
c) ¿Cuál fue el consumo de una familia que pagó$143?
d) Graficá la función en ejes cartesianos.

B)En cierta provincia, la institución recaudadora de impuesto decide aplicar la siguiente reglamentación: todas las personas que ganen menos de \$ 10000mensuales deben pagar en concepto de impuestos un 15% de lo que ganan por encima de \$3000.; las que ganen de \$10000 en adelante, 20% del total.

a) Determina cuál es la ley que caracteriza los impuestos a pagar en función del salario.

b)Grafica la función en ejes cartesianos

c) ¿Cuánto debe pagar de impuestos una persona que cobra \$8000?¿y otra que cobra \$16000?

FUNCION CUADRÁTICA

La función cuadrática tiene como expresión general $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$

Como ya sabemos su representación gráfica es una curva llamada parábola. Ella tiene un eje de simetría y un vértice que es la intersección entre dicho eje y la curva.

Contesta: ¿Cuánto valen a, b y c en $f(x) = x^2$?

¿Cuál es el eje de simetría y el vértice de la representación gráfica de esta función?

Si una función cuadrática tiene raíces reales x_1 y x_2 ya sean iguales o distintas, su fórmula puede expresarse en forma factorizada así: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

También su fórmula puede expresarse en forma canónica $f(x) = a(x - X_V)^2 + Y_V$

15) Representa las siguientes funciones (utilizando lo aprendido en corrimientos de gráfica de funciones y raíces de ecuaciones de 2° grado)

$f(x) = (x - 1)^2 + 4$

$k(x) = 2(x^2 + 9)$

$g(x) = 2(x + 2)(x - 3)$

$l(x) = ½(x + 2)(x + 4)$

$h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

$m(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$j(x) = 4x^2 + 8x + 4$

8) Realiza el análisis completo de las funciones graficadas en el ejercicio anterior.

16) La empresa La Santiagueña S.A. es una importante productora de cestos de mimbre del mercado nacional. El costo promedio (en \$) por unidad al producir una cantidad x de cestos es

$c(x) = 20 - 0{,}06x + 0{,}0002x^2$

Contesta: a) ¿Qué número de cestos producidos minimizaría el costo promedio?

b) ¿Cuál sería el costo promedio si se produjera dicha cantidad?

17) **¿Cuál es la ganancia máxima g (en \$) obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto** producto si su función de ganancia está dada por $g(x) = 60x - x^2$?

18) Halla la expresión de la función cuadrática que cumple con las condicions pedidas en cada caso y grafica.

a) Su gráfico pasa por el punto (1; -1); su eje tiene ecuación $x = -2$ y la ordenada del vértice es 3.

b) El vértice es el punto (1 ; 2) y su ordenada al origen es 3.

c) Una raiz es 4 y la otra es 0; el vértice es (2; -4)

19) Halla en cada caso el conjunto solución:

a) $f(x) < 0$ si $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) > 0$ si $f(x) = -x^2 + 3x$

c) $f(x) < 0$ si $f(x) = ½\, x^2 - 3/2\, x - 5$

d) $f(x) > 16/5$ si $f(x) = -5x^2 + 8x$

20) Los registros de temperatura tomados entre las 0 hs. las 24 hs en una zona rural se ajustan ala función: $T(x) = -0{,}1\, x^2 + 2{,}4\, x - 4{,}4$ donde T es la temperatura en °C y x la hora del día.

Grafica T(x) y contesta: ¿Llegará la temperatura a superar los 9ª C? De ser así, ¿en qué momento aproximadamente y por cuánto tiempo?